Análisis Matemático
1^{o} de Ingeniería Informática

Félix Gómez Mármol Javier Luis Cánovas Izquierdo

Curso 2001 - 2002

Índice general

Lección 1

El Cuerpo de los Números Reales

1.1. Introducción

La humanidad desde muy antiguo ha venido usando los números y ha ido inventando distintos tipos de números de acuerdo con sus necesitades. Los números naturales, que sirven para contar, y los fraccionarios, que sirven para expresar partes de la unidad, fueron los primeros en aparecer, las civilizaciones egipcias y mesopotámica ya tenían idea de estas clases de números. Los números negativos aparecen tardíamente, es en la Edad media cuando empiezan a usarse.

Sin embargo pese a esa familiaridad que hemos dicho anteriormente, tuvo que llegar el siglo XIX para que los matemáticos pusieran orden y definieran rigurosamente los campos numéricos: Números naturales, enteros, racionales y reales.

En el conjunto de los números naturales que se indica por $\mathbb{N}$ se definen dos operaciones llamadas suma y producto que verifican las propiedades siguientes (considerando $\mathbb{N} \nexists \{0\}$):

- Suma:
  - Es interna. Si $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m + n \in \mathbb{N}$
  - Es asociativa. Si $m, n, p \in \mathbb{N} \Rightarrow (m + n) + p = m + (n + p)$
  - Es conmutativa. Si $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m + n = n + m$
- Producto:
  - Es interna. Si $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m \cdot n \in \mathbb{N}$
  - Es asociativa. Si $m, n, p \in \mathbb{N} \Rightarrow (m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$
  - Existe elemento neutro. Es el 1 y cumple que $m \cdot 1 = m, \forall\, m \in \mathbb{N}$
  - Es conmutativa. $m \cdot n = n \cdot m, \forall\, m, n \in \mathbb{N}$
  - Es distributiva respecto de las suma. $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p, \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$

En el conjunto de los números enteros que se indica por $\mathbb{Z}$, se definen dos operaciones con las propiedades siguientes:

- Suma:
  - Es interna. Si $p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow p + q \in \mathbb{Z}$
  - Es asociativa. Si $p, q, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow (p + q) + r = p + (q + r)$
  - Es conmutativa. Si $p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow p + q = q + p$
  - Existe elemento neutro. Es el 0 y cumple que $q + 0 = q, \forall\, q \in \mathbb{Z}$

- Cualquier entero posee simétrico (opuesto). El opuesto de p se indica por $-p$ y cumple que $p + (-p) = 0$

- Producto:
  - Es interna. Si $p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow p \cdot q \in \mathbb{Z}$
  - Es asociativa. Si $p, q, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow (p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$
  - Existe elemento neutro. Es el 1 y cumple que $q \cdot 1 = q, \forall\ q \in \mathbb{Z}$
  - Es conmutativa. $p \cdot q = q \cdot p, \forall\ p, q \in \mathbb{Z}$
  - Es distributiva respecto de las suma. $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r, \forall\ p, q, r \in \mathbb{Z}$

El conjunto de los números enteros por tener las propiedades respecto de la suma y el producto citados anteriormente se dice que tiene estructura de *anillo*.

En el conjunto de los números racionales, indicados por $\mathbb{Q}$, también se definen dos operaciones: suma y producto, con las propiedades siguientes:

- Suma:
  - Es interna. Si $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$
  - Es asociativa. Si $a, b, c \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$
  - Es conmutativa. Si $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b = a + b$
  - Existe elemento neutro. Es el 0 y cumple que $a + 0 = a, \forall\ a \in \mathbb{Q}$
  - Cualquier racional posee simétrico (opuesto). El opuesto de a se indica por $-a$ y cumple que $a + (-a) = 0$

- Producto:
  - Es interna. Si $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Q}$
  - Es asociativa. Si $a, b, c \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  - Existe elemento neutro. Es el 1 y cumple que $a \cdot 1 = a, \forall\ a \in \mathbb{Q}$
  - Cualquier número racional distinto de 0 posee simétrico (inverso). El inverso de a lo indcaremos por $\dfrac{1}{a}$, ó, a^{-1} y cumple que $a \cdot \dfrac{1}{a} = a \cdot\ a^{-1} = 1$.
  - Es conmutativa. $a \cdot b = b \cdot a, \forall\ a, b \in \mathbb{Q}$
  - Es distributiva respecto de las suma. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall\ a, b, c \in \mathbb{Q}$

El conjunto $\mathbb{Q}$, por tener las propiedades citadas anteriormente respecto de las suma y el producto se dice que tiene estructura de *cuerpo*.

Consideremos una recta y un punto sobre ella, utilizando un segmento como unidad de longitud, vamos a hacer corresponder a cada número racional un punto sobre la recta de la forma siguiente:

Al número 0 le hacemos corresponder el punto de la recta ya citado. Situando el extremo izquierdo del segmento unidad sobre el punto correspondiente al 0 entonces al número 1 le asignamos su extremo derecho. Situando el extremo izquierdo del segmento unidad de longitud en el punto correspondiente al 1, al número 2 le hacemos corresponder el extremo derecho del segmento, así sucesivamente.

A los números $-1, -2, -3, \ldots$ le asignaremos los puntos simétricos respecto del 0 de los puntos correspondientes al $1, 2, 3, \ldots$.

Dividiendo el segmento unidad en dos partes iguales, tomando una de las partes y procediendo de forma similar a como hemos hecho antes, hacemos corresponder a los números $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ puntos de la recta.

El proceso se repite sucesivamente dividiendo el segmento unidad en 3 partes, 5 partes, etc.

La representación anterior nos permite establecer una relación de orden en el conjunto $\mathbb{Q}$, y así diremos que el números a es menor que b y pondremos $a < b$ cuando el punto correspondiente al número a se encuentra situado a izquierda del punto correspondiente al número.

Esta relación de orden permite establecer las dos propiedades siguientes:

- Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c\,;\ \forall\, c \in \mathbb{Q}$
- Si $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c\,;\ \forall\, c \in \mathbb{Q},\, c > 0$

Por tener estas propiedades se dice que el cuerpo de los números racionales está totalmente ordenado.

1.2. El cuerpo de los números reales

La matemática griega abordó rigurosamente un problema, conocido bastante tiempo atrás como inconmensurabilidad. Si volvemos a la representación de los números racionales sobre una recta y una vez hecha esta representación, observamos con lupa, en seguida nos damos cuenta que existen puntos a los que no les corresponde ningún número racional, esto se debe a que existen longitudes que no pueden ser expresadas mediante un número racional de veces una unidad de longitud. Un ejemplo de tal error es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado la unidad, como ahora probaremos por reducción a lo absurdo: [1]

Por el teorema de Pitágoras $l^2 = 2$. Si la longitud l pudiera ponerse como un número racional entonces $l = \dfrac{a}{b}$ (irreducible). Veamos cómo trabajar para llegar a una contradicción:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2;\ a^2 = 2b^2;\ a^2 = \dot{2};\ a = \dot{2}\ \rightarrow a = 2a' \rightarrow a^2 = 4a'^2$$

Y ahora, tomando los resultados $a^2 = 2b^2$ y $a^2 = 4'^2$ tenemos:

$$2b^2 = 4a'^2;\ b^2 = 2a'^2;\ b^2 = \dot{2};\ b = ,\dot{2}$$

Hemos obtenido que a y b son múltiplos de 2, siendo una contradicción con el supuesto inicial de que $\frac{a}{b}$ es irreducible. Se sigue entonces que l no puede expresarse de la forma $\frac{a}{b}$.

Para resolver este problema aparecen los números irracionales (generalmente representados por $\mathbb{I}$) y el conjunto de ellos junto con los racionales se les llama conjunto de los números reales, y lo indicamos por $\mathbb{R}$.

En la segunda mitad del siglo XIX se formaliza rigurosamente la construcción de los números reales y conviene decir que esta construcción realizada a partir de los números racionales, resulta ser bastante más compleja que la construcción de los números racionales a partir de los números enteros. Mientras que para obtener un número racional es necesario pares de números enteros, para construir un número real es necesario un conjunto infinito de racionales.

En el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ se definen dos operaciones llamadas suma y producto, con las siguientes propiedades:

- Suma:
  - Es interna. Si $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}$
  - Es asociativa. Si $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$

[1] aqui haría falta poner un cuadrado para el ejemplo de la inconmensurabilidad

- Es conmutativa. Si $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y = y + x$
- Existe elemento neutro. Es el 0 y cumple que $x + 0 = x, \forall\, x \in \mathbb{R}$
- Cualquier número real posee simétrico (opuesto). El opuesto de x se indica por $-x$ y cumple que $x + (-x) = 0$

- Producto:
  - Es interna. Si $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}$
  - Es asociativa. Si $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  - Existe elemento neutro. Es el 1 y cumple que $x \cdot 1 = x, \forall\, x \in \mathbb{R}$
  - Cualquier número real distinto de 0 posee simétrico (inverso). El inverso de x lo indcaremos por $\frac{1}{x}$, ó, x^{-1} y cumple que $x \cdot \frac{1}{x} = x \cdot\ x^{-1} = 1$.
  - Es conmutativa. $x \cdot y = y \cdot x, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
  - Es distributiva respecto de las suma. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

Por tener estas propiedades toma al igual que los números racionales el calificativo de *cuerpo.*

1.3. Módulo de un número real

Definición: Llamaremos módulo de un número real x a otro número real que se indica por $|x|$ y se define como x si $x \geq 0$ y $-x$ si $x < 0$, es decir:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se verifican las siguientes propiedades:

- $|x| \leq 0$
- $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $|x| = \text{máx}\{-x, x\}$
- $|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a$

  Demostración:

  a) $x \geq a;\ |x| \geq a$ (CONTRADICCIÓN)

  b) $x \leq -a;\ |x| = -x \geq a;\ |x| \geq a$ (CONTRADICCIÓN)

  c) $0 < x < a;\ |x| < a$

  d) $-a < x < 0\,;\ -x < a;\ |x| < a$

- $|x + y| \leq |x| + |y|$

  Demostración:

  $(-\,|x| \leq x \leq |x|\,) +$

  $(-\,|y| \leq y \leq |y|\,) = -(\,|x| + |y|\,) \leq\ x +\ y \leq |x| + |y| =$

  $-a \leq z \leq a = |z| < a = |x + y| < |x| + |y|$

Ejemplos:

$$|x+1| - |x-1| > 2$$

1) $-(x+1)-(-(x+1)) > 2 \rightarrow\ -x-1+x-1 > 2, \nexists x \in (-\infty,-1)$
2) $x+1-(-(x-1)) > 2 \rightarrow\ x+1+x-1 > 2 \rightarrow x > 1,\ \nexists x$
3) $x+1-x-1 > 2,\ \nexists x$

$$|x| + |2x-1| = |x-2|$$

$(-\infty,0) \rightarrow -x-2x+1 = -x+2;\ -2x = 1; x = -\frac{1}{2}$
$(0,\frac{1}{2}) \rightarrow x-2x+1 = -x+2;\ 2x-2x+1 = 2;\ \nexists x \in (0,\frac{1}{2})$
$(\frac{1}{2},2) \rightarrow x+2x-1 = -x+2;\ 2x+2x = 3;\ x = \frac{3}{4}$
$(2,\infty) \rightarrow x+2x-1 = x-2;\ 2x = -1;\ x = -\frac{1}{2} \notin (2,\infty)$

$$|x-1| + 2|x-3| - x > |x|$$

$(-\infty,0) \rightarrow -x+1+2(-1+3)-x > -x \rightarrow -3x > -7 \rightarrow x < \frac{7}{3}\ \notin (-\infty,0)$
$(0,1) \rightarrow -x+1+2(-x+3)-x > x \rightarrow -5x > -7 \rightarrow x < \frac{7}{5}\ \notin (0,1)$
$(1,3) \rightarrow x-1+2(-x+3)-x > x \rightarrow -3x > -5 \rightarrow x < \frac{5}{3}$
$(3,\infty) \rightarrow x-1+2(x-3)-x > x \rightarrow x > 7$

$$|x+y| \geq |x| - |y|$$

Demostración:
$(-|x| \geq -x \geq |x|) + (-|y| \geq -y \geq |y|) =$
$-(|x|-|y|) \geq -(x-y) \geq |x|-|y|$

1.4. Espacios métricos

Consideremos la aplicación de

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de modo que

$$((x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)) \longmapsto \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2}$$

De este modo:

$$2n = 1;\ (x,y) \longmapsto \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$$
$$n = 2;\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \longmapsto \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$$

Puede comprobarse que:

- $d((x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)) \geq 0$
  $d((x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)) = 0 \Longleftrightarrow (x_1,x_2,\ldots,x_n) = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$
- $d((x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)) = d((y_1,y_2,\ldots,y_n),(x_1,x_2,\ldots,x_n))$
- $d((x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)) \leq$
  $\leq d((x_1,x_2,\ldots,x_n),(z_1,z_2,\ldots,z_n) + d((z_1,z_2,\ldots,z_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n))$

Por tener estas propiedades se dice que la aplicación d es una distancia.

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^n$ y la distancia anteriormente definida. llamaremos entorno de centro el punto $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}$ y radio r al conjunto:

$$\bigcup (\bar{x}_0, r) \text{ ó } \bigcup_r (\bar{x}_0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n, d(\bar{x}_0, \bar{x}) < r\}$$

Ejemplo:[2]

Un conjunto se dice que es abierto si para cualquiera de sus puntos existe un entorno totalmente contenido en el conjunto.

Ejemplo:[3]

Un conjunto se dice que es cerrado si su complementario es abierto.

Ejemplo:[4]

Un punto se dice que es interior al conjunto cuando exite un entorno de él totalmente contenido en el conjunto. Al conjunto de puntos interiores de un conjunto A se le llama interior de dicho conjunto y se representa por A^o.

Ejemplo:

Siendo $A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ estudiar si es un conjunto abierto o cerrado.

Abierto no es porque dado un entorno de un punto cualquiera del conjunto exiten puntos del entorno que no pertenecen al conjunto.

Tampoco es cerrado ya que $0 \in A^c$ y cualquiera que sea el entorno de 0 contiene puntos de A (no puede estar contenido en el complementario). Se sigue que A^c no es abierto y por consiguiente A no es cerrado.

Obsérvese que si A hubiera sido el conjunto $A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, ciertamente no es abierto pero como su complementario sí que lo es entonces A es cerrado.

El punto 0 cumple la condición que cualquier entorno de él posee puntos del conjuntos A distintos de él, por eso se dice que es un punto de acumulación del conjunto A.

Definición: Diremos que el punto x es de acumulación del conjunto A si cualquier entorno de x contiene puntos del conjunto A distintos de x, es decir:

$$\left(\bigcup(x) - \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset$$

Proposición: El conjunto A es cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación.

Demostración:

Consideremos A^c y sea $x \in A^c$, supongamos que no existe un entorno de este punto totalmente contenido en A^c. Entonces cualquier entorno de x contiene puntos de A distintos de x.

Se sigue que x es un punto de acumulación de A y por tanto $x \in A$, esto es una contradicción y viene de suponer que A^c no es abierto.

El conjunto de los puntos de acumulación de un conjunto A se llama *conjunto derivado*, y se indica por A'.

El conjunto fomrmado por A y A' $(A \cup A')$ se le llama *clausura* del conjunto y se indica por $\bar{A}$.

1.5. Acotación de un conjunto

Definición: Un conjunto está acotado cuando está contenido en un entorno de uno de sus puntos (o de un punto cualquiera).

[2]Falta circunferencias y entorno

[3]Faltan entornos

[4]Dibujar ejemplos

Existe cierta terminología en relación con la acotación de conjuntos de $\mathbb{R}$ y así el número $a \in \mathbb{R}$ se dice que es cota superior (inferior) de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ si $a \geq x(a \leq x)$ $\forall x \in A$.

A la menor (mayor) de las cotas superiores (inferiores) se le llama *supremo* (*ínfimo*) y si pertenece al conjunto *máximo* (*mínimo*).

Obsérvese que la idea de que un conjunto está acotado cuando lo está superiormente (posee una cota superior) e inferiormente (posee una cota inferior) es equivalente a la de conjunto acotado, dada la forma general inicialmente.

Tanto los números racionales como los números reales son cuerpos conmutativos totalmente ordenados, sin embargo existe una diferencia fundamental entre el uno y el otro, y es que el cuerpo de los números reales posee la siguiente propiedad que no la posee el cuerpo de los números reales:

"Cualquier conjunto de números reales acotado superiormente posee supremo"

Por tener esta propiedad se dice que los números reales tienen una estructura de *cuerpo conmutativo totalmente ordenado y completo.*

1.6. Conjuntos compactos

Definición: Una familia de conjuntos abierta $\{A_i\}_{i\in I}$ se dice que es un recubrimiento abierto del conjunto A si $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

Ejemplo:

Si A es el conjunto formado por $\{\frac{1}{n}, n \subset \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ y A_n es un entorno abierto de $\frac{1}{n}$ para cada n y A_0 es un entorno abierto de 0, entonces $\{A_n\}_{n\geq 1} \cup A_0$ es un recubrimiento de A[5].

Dado un recubrimiento $\{A_i\}_{i\in I}$ de un conjunto A, si existe un subconjunto del recubrimiento que también es recubrimiento de A, se dice que este subconjunto es un subrecubrimiento del recubrimiento $\{A_1, A_2, \ldots, A_i\}$.

Un conjunto se dice que es *compacto* cuando de cualquier recubrimiento por conjuntos abiertos puede extraerse un subrecubrimiento finito.

1.6.1. Teorema de Heine-Borel

En el espacio métrico $\mathbb{R}^n$ un conjunto es compacto $\Longleftrightarrow$ es cerrado y acotado[6].

Ejemplos:

$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ No es compacto (está acotado pero no es cerrado)

$\left\{(-1)^n \dfrac{\sin n}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ No es compacto (está acotado pero no es cerrado.

$\{(e^x \cdot x),\, x \in \mathbb{R}^+\}$ No es compacto (no está acotado pero si es cerrado).

1.6.2. Teorema de Bolzano-Weierstrass

En $\mathbb{R}^n$ todo conjunto de puntos A, que esté acotado posee al menos un punto de acumulación.

Demostración:

Supongamos que este conjunto no tuviera puntos de acumulación. Entonces contiene sus puntos de acumulación (no existen) y por tanto es cerrado. Como además está acotado es compacto.

$\forall\, P \in A$ podemos encontrar $\bigcup(P)$ de modo que $\bigcup(P) \cap A = \{P\}$, la familia $\{\bigcup(P),\ P \in A\}$ es un recubrimiento abierto del conjunto A y como A es compacto podemos extraer un

[5] faltan graficos

[6] poner graficos

subrecubrimiento finito. Como esto no puede suceder, se sigue que el conjunto A posee al menos un punto de acumulación.

Lección 2

Sucesiones. Límites de sucesiones

2.1. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición: Se llama sucesión en $\mathbb{R}^n$ a una aplicación del conjunto de los números naturales en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ 1 &\longmapsto a_1 \\ 2 &\longmapsto a_2 \\ &\vdots \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

Las imágenes por f de los números naturales se les llama términos de la sucesión y se suelen representar por una misma letra con un subíndice. Así por ejemplo $f(1)$ lo podemos indicar por a_1 y se le llama primer término de sucesión. A $f(2)$ se le llama segundo término de sucesión y podemos expresarlos como a_2.

Conocer una sucesión significa conocer todos los términos de la sucesión. En ocasiones podemos conocer una sucesión a partir de su término general porque éste resulta ser la expresión donde figura la variable n, de modo que al sustituir n por 1 se obtiene el primer término, al sustituir n por 2 el segundo término...

Ejemplos:

La sucesión en $\mathbb{R}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ podemos expresarla a través de su término general poniendo $\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

La sucesión en $\mathbb{R}^2$: $(1,1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{9}), \ldots$ podemos expresarla a través de su término general $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$.

2.2. Límite de una sucesión. Propiedades

Definición: Se dice que la sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R}^n$ tiene por límite $a \in \mathbb{R}^n$ si $\forall \bigcup(a)$ existe un n_0 tal que $a_n \in \bigcup(a)$, $\forall\, n \geq n_0$.

$\forall\, \varepsilon > 0$ número real, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que la distancia entre a y a_n ($d(a, a_n)$) es menor que ε si $n \geq n_0$.

Cuando la sucesión a_n tiene por límite a escribiremos $\lim(a_n) = a$.

Ejemplos:

- Estudiar si a es punto de acumulación de la sucesión de razón a_n cuando $\lim(a_n) = a$.

Veámoslo con una sencilla demostración:

$\lim(a_n) = a \Rightarrow \exists\{\bigcup(a) - \{a\}\} \in a_n \Rightarrow a$ es punto de acumulación.

- Si a es el punto de acumulación de una sucesión , ¿a es el límite?

No. Supongamos una sucesión con dos puntos de acumulación, debido a la propiedad de unicidad del límite no pueden existir dos límites, por lo que los puntos de acumulación no son límites.

PROPIEDADES

1.- Si existe límite de una sucesión, es único.

Demostración:

Supongamos que a_n es convergente y por un lado $\lim a_n = a$ y $\lim a_n = b$, con $a \neq b$. Consideremos entornos $\bigcup(a)$, $\bigcup(b)$ de modo que $\bigcup(a) \cap \bigcup(b) = \emptyset$. Por definición existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in \bigcup(a) \forall\ n \geq n_1$. Existe n_2 tal que $a_n \in \bigcup(b), \forall\ n \geq n_2$.

Si suponemos que $n_1 \geq n_2$ entonces $a_n \in \bigcup(a) \cap \bigcup(b)$ lo que no es posible. Esta contradicción viene de suponer la existencia de dos límites distintos.

2.- Si una sucesión posee límite está acotada.

Demostración:

Supongamos que la sucesión a_n tiene por límite a y consideremos un entorno del punto a. Por definición todos los términos de la sucesión a partir del lugar están dentro del entorno, quedando fuera un número finito o ninguno. En cualquier caso siempre se puede crear un entorno de uno de los puntos de la sucesión que contenga en su interior a todos los puntos de la sucesión. Se concluye entonces que la sucesión es un conjunto acotado.

2.3. Sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}^n$

Definición: Una sucesión $(a_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es de Cauchy si para cualquier número real $\varepsilon > 0$ es posible encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$ entonces $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Proposición: Si $a_n \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy está acotada.

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$ por definición de sucesión de Cauchy existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n, m \geq n_0$ se cumple que $d(a_n, a_m) < \varepsilon$. Entonces $\forall\ m \geq n_0$ se cumple que $d(a_{n_0}, a_m) < \varepsilon$.

Tomando un entorno de centro a_{n_0} y radio $\varepsilon, \bigcup_\varepsilon(a_{n_0})$ se tiene que $a_m \in \bigcup_\varepsilon(a_{n_0})$. Como fuera del entorno existen a lo más un número finito de términos de la sucesión, entonces se puede encontrar un entorno de uno de los puntos de (a_n) que contenga a todos los puntos de (a_n). Se sigue que (a_n) está acotada.

Teorema: La sucesión $a_n \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Longleftrightarrow$ es convergente.

$\Rightarrow$ Por ser (a_n) de Cauchy está acotada. Posee al menos un punto de acumulación. Veamos que no pueden existir dos puntos de acumulación:

Si A es un punto de acumulación de a_n entonces $\lim(a_n) = a$, porque si esto no fuera cierto entonces dado un entorno $\bigcup(a)$, existirían infinitos térmnos de la sucesión a_n fuera de él, y consiguientemente existiría otro punto de acumulación.

Ahora bien, la existencia de dos puntos de acumulación es incompatible con el hecho de ser de Cauchy, ya que si $\varepsilon > 0$ es la distancia entre ambos entornos exigiría infinitos a_n, a_m de modo qu la distancia $d(a_n, a_m) > \varepsilon$.

$\Rightarrow$ Es convergente. Supongamos que el $\lim(a_n) = a$. Dado ε, consideremos el entorno $\bigcup_{\frac{\varepsilon}{a}}(a)$. Por tanto $\forall\ n, m \geq n_0$, se cumple $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

2.4. Subsucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición: Dada la sucesión (n) dada por los números naturales, se llama subsucesión e (n) a cualquier otra sucesión $(m_n) \subset (n)$ de modo que $m_{n_1} < m_{n_2}$ si $n_1 < n_2$.

Ejemplo:

$(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ es subsucesión de $\mathbb{N}$.

$(3, 7, 11, 16, 21, \ldots)$ es subsucesión de $\mathbb{N}$.

Definición: Llamaremos subsucesión de la sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R}^n$ a cualquier otra sucesión $(a_{m_n}) \subset (a_n)$ de modo que (m_n) es subsucesión de (n).

Proposición: Cualquier sucesión acotada posee una subsucesión convergente.

Demostración:

Por estar acotada posee al menos un punto de acumulación. Consideremos la sucesión de entorno $\bigcup_{\frac{1}{n}}(a)$ y a continuación sea (a_{m_1}) el primer término de la sucesión (a_m) contenido en $\bigcup_1(a)$.Sea a_{m_2} el primer término de la sucesión posterior a a_{m_1} contenido en $\bigcup_{\frac{1}{2}}(a)$. Sea el a_{m_3} el primer término de la sucesión posterior a a_{m_2} contenida en $\bigcup_{\frac{1}{3}}(a)$. Si continuamos sucesivamtente obtenemos una sucesión a_{m_n} que es subsucesión de (a_n) y por construcción converge al punto a.

Teorema: Si (a_n) es convergente con $\lim(a_n) = a$ entonces también lo es cualquier subsucesión de ella y además converge al mismo límite que a_n.

Demostración:

Supongamos que $\lim(a_n) = a$ y que a_{m_n} es subsucesión de a_n. Por estar acotada (tiene lı́mite) (a_n) entonces a_{m_n} está acotada y por tanto posee al menos un punto de acumulación. No puede poseer dos porque (a_n) tendría dos puntos de acumulación, y eso es imposible (ya que es convergente).

El punto de acumulción de (a_n) a de ser a, porque en caso contrario (a_n) tendría dos puntos de acumulación y esto no es posible. Si a_{m_n}posee un único punto de acumulación entonces converge a él, y dado que este punto es el punto a, entonces $\lim(a_n) = a$.

En lo que sigue nos dedicaremos a estudiar las sucesiones de números reales.

2.5. Suesiones de números reales. Convergencia

Definición: Una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R}$ le llamaremos sucesión de números reales.

Definición: La definición de límite dada por carácer generel para $\mathbb{R}^n$, ciertamente es válida y en todo caso tendría una adaptación para $n = 1$.

Las propiedades de unicidad del límite y acotación de sucesiones convergente en $\mathbb{R}^n$ son válidas. Ahora, también lo es la siguiente propiedad que de modo particular enunciamos ahora y que se conoce con el nombre de *regla del sandwich*:

Si (a_n) y (b_n) son sucesiones convergente con $\lim(a_n) = \lim(b_n) = a$ y (c_n) cumple que $a_n < c_n < b_n$, $\forall\ n$, entonces c_n es convergente y además $\lim(c_n) = a$.

Demostración:

Consideremos $\bigcup(a)$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$ es $a_n \in \bigcup(a)$. También lo existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ es $b_n \in \bigcup(a)$. Si $n_0 \geq n_1$ entonces para $\forall\ n > n_0$ se cumple que $a_n, b_n \in \bigcup(a)$ y por tanto $c_n \in \bigcup(a)$.

2.6. Anillo de las sucesiones en $\mathbb{R}$

En el conjunto de las sucesiones de números reales se definen dos operaciones:

- Suma: $(a_n) + (b_n) = (c_n)$ donde $c_n = a_n + b_n$.
- Producto: $(a_n) \cdot (b_n) = (c_n)$ donde $c_n = a_n \cdot b_n$.

Estas operaciones poseen las siguiente propiedades:

- Suma:

- Es interna.
- Es asociativa: $((a_n) + (b_n)) + (c_n) = (a_n) + ((b_n) + (c_n))$.
- Existe elemento neutro. Es la sucesión nula (0).
  $(a_n) + (0) = (a_n)$.
- Cualquier sucesión posee simétrica (opuesta). La opuesta de (a_n) se indica por $-(a_n)$ y es $(-a_n)$ y cumple que $(a_n) + (-a_n) = (0)$.
- Es conmutativa: $(a_n) + (b_n) = (b_n) + (a_n)$.

▪ Producto:

- Es interna.
- Es asociativa: $((a_n) \cdot (b_n)) \cdot (c_n) = (a_n) \cdot ((b_n) \cdot (c_n))$.
- Existe elemento neutro. Es (1).
  $(a_n) \cdot (1) = (a_n)$
- Es conmutativa: $(a_n) \cdot (b_n) = (b_n) \cdot (a_n)$
- Es distributiva respecto de la suma: $(a_n) \cdot ((b_n) + (c_n)) = (a_n) \cdot (b_n) + (a_n) \cdot (b_n)$.

2.7. Infinitésimos, operaciones con infinitésimos

Definición: Diremos que la sucesión a_n es un infinitésimo si $\lim(a_n) = 0$.

Ejemplo:

$a_n = \frac{1}{n^2}$; (a_n) es un infinitésimo. $\left|\frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon \rightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$; $\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right) + 1 = n_0; \forall\ n \geq n_0$.

Obsérvese que si $\lim(a_n) = 0$ aplicando la definición se tiene que dado un $\varepsilon > 0$, exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$ es $a_n \in \bigcup_\varepsilon(0)$, o lo que es lo mismo $d(a_n, 0) < \varepsilon$, y también $|a_n| < \varepsilon$.

En lo que sigue vamos a demnostrar que la suma y el producto de dos infinitésimos es siempre un infinitésimo.

Propiedad 1: La suma de dos infinitésimos es otro infinitésimo.

Demostración:

Supongamos que $(a_n), (b_n)$ son dos infinitésimos y consideremos la sucesión suma $(a_n) + (b_n) = (c_n)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim(a_n) = 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\ n \geq n_0$. como $\lim(b_n) = 0$ entonces existes $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\ n \geq n_1$.

Suponiendo que $n_0 \geq n_1$ se tiene que $\forall\ n \geq n_0$ es:

$|c_n| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Propiedad 2: El producto de una sucesión constante por un infinitésimo es otro infinitésimo.

Demostración:

Supongamos que $(a_n) = (K)$ y que $\lim(b_n) = 0$ y consideremos la sucesión $(c_n) = (K)(a_n) = (Ka_n)$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$ se cumple que $|a_n| < \frac{\varepsilon}{|K|}$. Por tanto: $\forall\ n \geq n_0$ se cumple:

$|c_n| = |Ka_n| = |K||a_n| \leq |K|\frac{\varepsilon}{|K|} = \varepsilon$.

Como <u>consecuencias</u> de esta propiedad se tiene que:

i) El producto de una sucesión acotada por un infinitésimo es un infinitésimo.

   Demostración:

   Si (a_n) está acotada y $\lim(b_n) = 0$, entonces $K_1 b_n \leq a_n b_n \leq K_2 b_n$

Como $\lim(K_1 b_n) = \lim(K_2 b_n) = 0$, aplicando la regla del sandwich se tiene $\lim(a_n b_n) = 0$.

ii) El producto de una sucesión convergente por un infinitésimo es un infinitésimo.

Demostración:

Si (a_n) es convergente y b_n un infinitésimo, sabido es que a_n está acotada, luego aplicando la anterior consecuencia $\lim(a_n b_n) = 0$.

iii) El producto de dos infinitésimos es otro infinitésimo.

Demostración:

Téngase en cuenta que un infinitésimo es una sucesión convergente, lo que nos lleva a la anterior consecuencia.

2.8. Límite de las operaciones aritméticas

Supongamos que $(a_n), (b_n)$ son sucesiones convergente, vamos a probar que:

i) $((a_n) \pm (b_n))$ es convergente y además $\lim\left((a_n) \pm (b_n)\right) = \lim(a_n) \pm \lim(b_n)$.

ii) $(a_n)(b_n)$ es convergente y además $\lim\left((a_n) \cdot (b_n)\right) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$.

iii) Si (b_n) no es un infinitésimos, entonces $\frac{(a_n)}{(b_n)}$ es convergente y además $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}$.

Para probar estas propiedades vamos a tener en cuenta que $\lim(a_n) = a \Leftrightarrow \lim(a_n - a) = 0$, es decir, $(a_n - a)$ es un infinitésimo (pruébese). Supongamos también que $\lim(a_n) = a$ y $\lim(b_n) = b$.

i) La sucesión $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ cumple.

$(a_n + b_n) - (a + b) = \underbrace{(a_n - a)}_{inf} + \underbrace{(b_n - b)}_{inf} =$ infinitésimo.

Luego $(a_n) + (b_n)$ es convergente y además $\lim\left((a_n) + (b_n)\right) = a + b = \lim(a_n) + \lim(b_n)$.

ii) $((a_n)(b_n) - (a \cdot b)) = (a_n b_n - ab) = (a_n b_n - ab + ab_n - ab_n) =$

$= ((a_n - a)b_n + (b_n - b)a) = ((a_n - a)b_n) + ((b_n - b)a) =$

$= \underbrace{(a_n - a)}_{inf}\underbrace{(b_n)}_{cont} + \underbrace{(b_n - b)}_{inf}\underbrace{(a)}_{cont} = inf + inf = inf.$

Se sigue que $(a_n)(b_n)$ es convergente y además $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \lim(a_n)\lim(b_n)$.

iii) $\left(\frac{(a_n)}{b_n)} - \frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a_n b - ab_n}{bb_n}\right) = \left(\frac{1}{b_n b}\right)(a_n b - ab_n)) =$

$\left(\frac{1}{b_n b}\right)(a_n b - ab + ab - ab_n) = \left(\frac{1}{b_n b}\right)(b(a_n - a) \pm a(b - b_n)) =$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{b_n b}\right)}_{acotado}\left(\underbrace{(b)}_{cte}\underbrace{(a_n - a)}_{inf} - \underbrace{(a)}_{cte}\underbrace{(b_n - b)}_{inf}\right) = (acotado)(inf) = (inf).$$

$\left(\frac{(a_n)}{(b_n)}\right)$ es convergente y además $\lim \frac{(a_n)}{(b_n)} = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{a}{b}$.

Siguiendo el límite de las operaciones aritméticas podemos abordar el cálculo del límite de una expresión donde aparecen varias sucesiones sometidas a operaciones aritméticas. Sucede a veces que aplicando estos cálculos se obtiene resultados que nada dicen acerca del límite de la expresión. Estos resultados son conocidos con el nombre de indeterminaciones, y cuando se presentan el rocedimiento a seguir es transformar la expresión en otra que a los más difiera de la primera en un número finito de puntos y cuyo límite se sabw calcular. Como ambas ecpresiones tienen el mismo límite, nuestro problema estará resuelto.

2.9. Sucesiones infinitas

Definición Diremos que la sucesión (a_n) tiene por límite $+\infty(-\infty)$ si $\forall\ K \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$ se cumple que $a_n > K(a_n < K)$, y se denota $\lim(a_n) = \pm\infty$.

Veamos el límite de algunas operaciones con sucesiones infinitas:

1. Si $\lim(a_n) = \lim(b_n) = +\infty(-\infty)$ entonces $\lim\left((a_n) + (b_n)\right) = +\infty(-\infty)$.

   Demostración:

   Dada $K \in \mathbb{R}$ como $\lim(a_n) = +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$ es $a_n > K$. Como $\lim(b_n) = +\infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_1$ es $b_n > K$.

   Supongamos $n_0 \geq n_1$ entonces $\forall\ n \geq n_0$ es $a_n + b_n > K + K > K$ luego $\lim\left((a_n) + (b_n)\right) = +\infty$.

   Análoga demostración se re4alizaría para el caso de $-\infty$.

2. Si $\lim(a_n) = a > 0$ y $\lim(b_n) = +\infty$ entonces $\lim(a_n)(b_n) = +\infty$.

   Demostración:

   Como $\lim a_n = a$ existen $a < K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tales que $K_1 < a_n < K_2,\ \forall\ n \geq n_0$ donde $n_0 \in \mathbb{N}$.

   Entonces $K_1 b_n < a_n b_n < K_2$ y puesto que $\lim K_1 b_n = +\infty$ (pq?) entonces $\lim a_n b_n = +\infty$ (pq?).

   Similar demostración se haría para el caso de que $a < 0$ y $\lim b_n = \pm\infty$ y así se probaría que $\lim(a_n)(b_n) = -\infty$ si $a < 0$, $\lim b_n = +\infty$ ó que $\lim(a_n)(b_n) = +\infty$ si $a < 0$, $\lim(b_n) = -\infty$.

3. Si (a_n) es constante y $\lim(a_n) = \pm\infty$ entonces $\lim \frac{(a_n)}{(b_n)} = 0$.

   Demostración:

   Supongamos $(a_n) = (c)$ y $\lim(b_n) = +\infty$.Consideremos $\varepsilon > 0$ y un número K de modo que sea $\left|\frac{c}{K}\right| < \varepsilon$. Como $\lim(b_n) = +\infty$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$ se cumple que $b_n > K$.

   Entonces $\frac{a_n}{b_n} = \frac{c}{b_n}$ cumple que $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{c}{b_n}\right| < \left|\frac{c}{K}\right| < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n_0$.

   Se sigue entonces que $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

   La demostración para el caso de que $\lim(b_n) = -\infty$ es muy parecida (pq?).

Consecuencias de la segunda operación anteiormente expuesta:
Si (a_n) es convergente y $\lim(b_n) = \pm\infty$ entonces $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.
Demostración:
Si (a_n) es convergente entonces esta acotada $K_1 < a_n < K_2,\ \forall\ n$.
Como consecuencia $\frac{K_1}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{K_2}{b_n},\ \forall\ n y b_n > 0$.
La demostarción se ha hecho para el cas de que $\lim(b_n) = +\infty$, pero de forma muy similar se haría para el caso de $\lim(b_n) = -\infty$.

En la pregunta anterior digimos que aplicando los resultados conocidos sobre el límite de las operaciones aritméticas no siempre es posible obtener el límite de una expresión. Los resultados, también digimos que se llamaban indeterminaciones. Son indeterminaciones:

$$(+\infty)-(+\infty);\ 0\cdot(\pm\infty);\ \frac{0}{0};\ \frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$$

Veamos algunos ejemplos:

- $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=(+\infty)-(+\infty)$.

  $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$
  $=\dfrac{1}{+\infty+\infty}=0.$

- $\lim(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$.

  $\lim\dfrac{(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2})}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=$
  $=\lim\dfrac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=\dfrac{1}{(+\infty)+(+\infty)+(+\infty)}.$

- $\lim\dfrac{n^2+1}{n^2+n+2}=\dfrac{+\infty}{+\infty}.$

  $\lim\dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\dfrac{1+0}{1+0+0}=1.$

- $\lim\dfrac{n\sqrt{n+1}-\sqrt{n^3+n}}{n\sqrt{n^2+2n+3}-2}=\dfrac{(+\infty)-(+\infty)}{(+\infty)}.$

  $\lim\dfrac{\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3+n}}{\sqrt{n^4+2n^3+3n^2}-2}=\lim\dfrac{\sqrt{\frac{n^3+n^2}{n^4}}-\sqrt{\frac{n^3+n}{n^4}}}{\sqrt{\frac{n^4+2n^3+3n^2}{n^4}}-\frac{2}{\sqrt{n^4}}}=$

  $\lim\dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}\frac{3}{n^2}}-\frac{2}{\sqrt{n^4}}}=\dfrac{0-0}{1-0}=0.$

- $\lim\dfrac{a^n}{n^n}=\lim\left(\dfrac{a}{n}\right)^n=0.$

  $0<\dfrac{a}{n}<\dfrac{1}{2};\ 0<\left(\dfrac{a}{n}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n\longrightarrow 0.$

- $\lim\dfrac{a^n}{n}, a>0.$

  i) $0<a\leq 1, \lim\dfrac{a^n}{n}=0.$

  ii) $a>1;$
  $a=1+d, d>0$
  $a^n=(1+d)^n=1+\dbinom{n}{1}d+\dbinom{n}{2}d^2+\ldots+\dbinom{n}{n}d^n.$
  $>1+nd+\dfrac{n(n-1)}{2}d^2$
  $\dfrac{a^n}{n}>\dfrac{1}{n}+d+\dfrac{n-1}{2}d^2\longrightarrow>+\infty.$

$$\lim \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

- $\lim \dfrac{a^n}{n^p}, p > 1.$

  i) $0 < a < 1 \longrightarrow \lim \dfrac{a^n}{n^p} = 0.$

  ii) $a > 1$ Existe $b > 1$ tal que $b^p = a$.

  Como consecuencia $\lim \dfrac{a^n}{n^p} = \lim \dfrac{(b^p)^n}{n^p} = \lim \left(\dfrac{b^n}{n}\right)^p = +\infty^p = +\infty.$

- $\lim \dfrac{n^n}{n!}.$

  $a_n = \dfrac{n^n}{n!}.$

  $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{n+1}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$
  $$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

  $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 2;\ a_{n+1} > 2a_n$

  Asi tenemos:

  $$\begin{array}{c} a_2 > 2a_1 \\ a_3 > 2a_2 \\ \vdots \\ a_n > 2a_{n-1} \\ = \\ +\infty \longrightarrow a_n > 2^{n-1}a_1 \longrightarrow +\infty \end{array}$$

- $\lim \dfrac{a^n}{n!}.$

  i) $0 \leq a \leq 1;\ \ \lim \dfrac{a^n}{n!} = 0.$

  ii) $a > 1;\ \ \lim \dfrac{a^n}{n!}.$

  $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$

  $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{a^n}{n!}} = a\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}.$$

  $a_{n+1} < \dfrac{1}{2}a_n$

  Asi tenemos:

$$
\begin{aligned}
a_2 &> \frac{1}{2}a_1\\
a_3 &> \frac{1}{2}a_2\\
&\vdots\\
a_n &> \frac{1}{2}a_{n-1}\\
&=\\
0 \longrightarrow a_n &> \frac{1}{2^{n-1}}a_1 \longrightarrow 0\\
a_n &\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

2.10. Sucesiones monótonas

Definición: La sucesión $(a_n) \in \mathbb{R}$ se dice que es monótona creciente (decreciente) si $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$).

Propiedad: Si (a_n) es monótona creciente y está acotada entonces es convergente y además el $\lim(a_n) = sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración:

Sea $a = sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Dado un entorno del punto a, $\bigcup(a)$, dentro del entorno y a la derecha del punto a no existe término de la sucesión (ya que a es supremo).

Necesariamente axiste un término de la sucesión en $\bigcup(a)$ (ya que si no existiera ninguno a no sería supremo). Si a_{n_0} es el primer término de la sucesión que está dentro del entorno de a, entonces $\forall\ n \geq n_0$ es $a_n \in \bigcup(a)$. Puesto que cumple la definición acabamos de demostrar que la sucesión a_n es convergente y tiene opr límite el punto a.

De modo similar se mostraría la propiedad siguiente:

Si a_n es monótona decreciente y está acotada inferiormente entonces es convergente y además $\lim(a_n) = inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

EL NÚMERO e.

Una de las sucesiones que con más frecuencia aparece es la que tiene por término general $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Puede probarse (hágase) que esta sucesión es monótona creciente y está acotada. Su límite es un número irracional que se representa por la letra e.

Puede probarse igualmente que si a_n es un infinitésimo también $\lim\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} = e$.

Por ejemplo:

- $$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\left(\frac{-1}{n}\right)\right)^n = \lim\left[\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right]^1 = e^{-1}$$

- $$\begin{aligned}\lim\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{3n} &= \lim\left(1+\frac{n+1}{n-1}-1\right)^{3n} = \lim\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{3n} =\\ &= \lim\left[\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{n-1}}\right]^{3n} = e^6\end{aligned}$$

Obsérvese que éste último límite tiene como resultado inmediato 1^∞. Este resultado es una indeterminación que deberemos unir a las ya conocidas y que suele resolverse a partir de la definición del número e.

2.11. Sucesiones recurrentes

Hasta el momento se ha definido una sucesión (a_n), estableciendo el valor de a_n maediante una expresión que depende de n. Utilizando esta expresión (término general) hemos podido estudiar la convergencia de una sucesión y podríamos estudiar su monotonía u otras propiedaddes si fuera necesario.

Existen sin embargo otras formas de definir una sucesión y de entre ellas conviene mencionar la definición por recurrencia. Consiste en expresar (a_n) como una función de algunos términos anteriores:

$$a_n = \rho(a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-m})$$

$a_n = a_{n-1} + 3$; $a_n = a_{n-1} \cdot 3$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_n = \sqrt{a_n + 1}$
$a_n = \sqrt{{a_{n-1}}^2 + 1}$; $a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}\right)$.

Obsérvese que si en la expresión general se conocen los m primeros términos de la sucesión entonces a partir de ellos se conoce el $m-$ésimo y a partir de él el a_{m+2} y así sucesivamente todos los términos de la sucesión.

En el ejemplos primero y en el segundo, conocido el primer término de la sucesión se obtiene el segundo, y a partir de él el tercero y así sucesivamente.

En el ejemplos tercero, conocidos los dos primeros términos de la sucesión se obtiene el tercero y partir de él el cuarto y así sucesivamente.

Lección 3

Series de números reales

3.1. Series de números reales. Primeras definiciones

Definición: Llamaremos serie de números reales a un par $((a_n),(s_n))$ de sucesiones de modo que $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Por ejemplo:

$$\underbrace{\left(\left(\frac{1}{2^n}\right),(s_n)\right) \quad \left(\left(\frac{1}{2^n}\right),\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)}_{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}}$$

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}-1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Si $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$ entonces se dice que la serie es convergente y a s se le llama suma de la serie.

Si $\lim s_n = +\infty$ entonces se dice que la serie es divergente $\left(\sum_1^{+\infty} a_n\right)$.

Pondremos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$ para indicar que s es la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Caso de ser divergente $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)$ pondremos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$.

A veces cuando se sabe qie la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, quiere indicarse tal hecho y no importa el conoer su suma, se pone $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < *\infty$.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^n}$ es convergente ya que:

$$s_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ y } \lim s_n = 1, \text{ es decir, } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

.

Como veremos, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

En lo que sigue nos dedicaremos a estudiar la convergencia de series.

3.2. Operaciones con series. Convergencia.

Dadas dos serie $\sum_1^{+\infty} a_n$, $\sum_1^{+\infty} b_n$, llamaremos suma de ambas a la serie $\sum_1^{+\infty}(a_n + b_n)$.

Si $t \in \mathbb{R}$ el producto de t por la serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ es la serie:

$t\sum_1^{+\infty} a_n = \sum_1^{+\infty} t\, a_n$.

Proposición: Si $\sum_1^{+\infty} a_n$, $\sum_1^{+\infty} b_n$ son convergentes entonces $\sum_1^{+\infty} a_n + \sum 1 + \infty b_n$ también lo es. Además si $\sum_1^{+\infty} a_n = a$, $\sum_1^{+\infty} b_n = b$ entonces $\sum_1^{+\infty} a_n + \sum_1^{+\infty} b_n = a + b$.

Demostración:

$\sum_1^{+\infty} a_n + \sum_1^{+\infty} b_n = \sum_1^{+\infty}(a_n + b_n)$.

$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$.

Entonces: $\lim((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n)) = \lim(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \lim(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = a + b$.

Queda probado entonces que $\sum_1^{+\infty} a_n + \sum_1^{+\infty} b_n = \sum_1^{+\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Proposición: Si $t \in \mathbb{R}$ y $\sum_1^{+\infty} a_n$ es convergente entonces $t\left(\sum_1^{+\infty} a_n\right)$ es convergente. Además si $\sum_1^{+\infty} a_n = a$ entonces $t\left(\sum_1^{+\infty} a_n\right) = \sum_1^{+\infty} t\, a_n = t\, a$.

Demostración:

La suma parcial de la serie:

$t \sum_1^{+\infty} a_n = \sum_1^{+\infty}(t\, a_n)$ es: $(t\, a_1 + t\, a_2 + \ldots + t\, a_n)$

Para ver si es convergente estudiaremos el límite de esta suam aprcial n-ésima.

$\lim(t\, a_1 + t\, a_2 + \ldots + t\, a_n) = \lim t(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = t \lim(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = t\, a$.

No sólo hemos proabdo que la serie $t\left(\sum_1^{+\infty} a_n\right)$ es convergente sino que además su suma es $t\, a$.

3.3. Series de términos positivos. Algunos criterios de convergencia

Definición: Una serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ donde $a_n > 0,\ \forall\, n$, se llama serie de términos positivos.

Criterio de convergencia 1.

Si $\sum_1^{+\infty} a_n, \sum_1^{+\infty} b_n$ son dos series de términos positivos con $a_n \leq b_n$ y $\sum_1^{+\infty} b_n$ convergente entonces $\sum_1^{+\infty} a_n$ también es convergente.

Demostración:

Supongamos $\sum_1^{+\infty} b_n = b$ y pongamos $s_n = a_1 + 2_2 + \ldots + a_n$. La suceisón (s_n) es monótona creciente porque $s_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} > s_n$.

Además $s_n \leq b,\ \forall\, n$ porque $s_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leq (b_1 + b_2 + \ldots + a_n) < b$.

Entonces s_n es monótona creciente y está acotada superiormente, sesabe entonces que existe límite de s_n, $\lim s_n = a \in \mathbb{R}$ por tanto $\sum_1^{+\infty} a_n$ es convergente.

Ejemplos: Probar que:

- $\sum_1^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ es convergente y comprobar su suma.

  $$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
  $$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$
  $$\begin{aligned}\lim s_n &= \lim\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right)\\ &= \lim\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) = 1\end{aligned}$$

  Es convergente y su suma vale 1.

- $\sum_3^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - 3n + 2} = 1$.

  $$\frac{1}{n^2 - 3n + 2} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n-2} = \frac{n(A+B) + (-2A - B)}{n^2 - 3n + 2}$$

  $A + B = 0;\ A = -1$

  $-2A - B = 1;\ B = 1$

$$\frac{1}{n^2-3n+2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}s_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$$

Serie telescópica

$$s_n=\left(1-\frac{1}{n-1}\right)=\left(\frac{n-1-1}{n-1}\right)=\frac{n-2}{n-1}$$

$$\lim s_n=\lim\left(\frac{n-2}{n-1}\right)=1$$

Criterio de convergencia 2: Serie armónica.

$$\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

Caso $\alpha=1$:

$$\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{16}+\ldots$$

Pongamos (s_n) para inicar la sucesión de las sumas parciales n-ésimas. Consideremos a continuación la serie:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}+\ldots$$

Pongamos (t_n) para inicar la sucesión de las sumas parciales n-ésimas.

Comparando ambas series dse observa que $t_n\leq s_n$. Consideremos la subsucesión de (t_n) formada por (t_{2^n}).

Es fácil comprobar que $t_1=1$; $t_2=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$; $t_{2^2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; $t_{2^3}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; $\ldots$; $t_{2^n}=1+n\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ciertamente $\lim(t_{2^n}=\lim\left(1+n\left(\frac{1}{2}\right)\right)=+\infty$.

Como consecuancia la sucesión t_n no es convergente y como es monótona creciente necesariamente $\lim t_n=+\infty$.

Puesto que $t_n\leq s_n$, $\forall n$, necesariamente $\lim s_n=+\infty$, y por tanto la serie $\sum_1^{+\infty}\frac{1}{n}$ es divergente.

Caso $\alpha>1$:

$\sum_1^{+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+\dfrac{1}{4^\alpha}+\dfrac{1}{5^\alpha}+\dfrac{1}{6^\alpha}++\dfrac{1}{7^\alpha}+\dfrac{1}{8^\alpha}+\dfrac{1}{9^\alpha}+\ldots++\dfrac{1}{n^\alpha}+\ldots\ (s_n)$

Consideremos la siguiente serie:

$1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{4^\alpha}+\dfrac{1}{4^\alpha}+\dfrac{1}{4^\alpha}+\dfrac{1}{4^\alpha}+\dfrac{1}{8^\alpha}+\dfrac{1}{8^\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{16^\alpha}+\ldots\ (t_n)$

Como se indica por (s_n), (t_n) indicamos las sucesiones de las sumas parciales de la primera y segunda serie respectivamente.

Por construcción se tiene que $s_n\leq t_n$, $\forall n$, y además las subsucesión de t_n:

$t_1=1$; $t_3=1+2^{1-\alpha}$; $t_7=1+2^{1-\alpha}+2^{2(1-\alpha)}$; $t_15=1+2^{1-\alpha}+2^{2(1-\alpha)}+2^{3(1-\alpha)}$;

$t_2^{n-1}=1+2^{1-\alpha}+2^{2(1-\alpha)}+\ldots+2^{(n-1)(1-\alpha)}=1\ \frac{2^{(1-\alpha)\,n}-1}{2^{1-\alpha}-1}$

Es convergente puesto que $2^{1-\alpha}=\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}<1\left(\text{Converge a}\dfrac{1}{1-2(1-\alpha}\right)$.

Puesto que la sucesión t_n es monótona creciente o bien es convergente o tiene por límite $+\infty$, pero como no puede ser este último caso ya que si así fuera cualquiera de sus subsucesiones tendría por límite $+\infty$ y hemos encontrado una que no tiene por límite $+\infty$.Se sigue entonces que la sucesión t_n es convergente y puesto que $s_n\leq t_n$ la sucesión (s_n) es convergente.

Se sigue entonces que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha>1$ es convergente.

Criterio de convergencia 3.

Si $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = r$, $r \neq 0$, las series $\sum_1^{+\infty} a_n, \sum_1^{+\infty} b_n$ son a la vez convergentes o divergentes:

Demostración:

Como $a_n, b_n > 0$ entonces $r > 0$.

Como $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = r$ entonces dado un entorno (c_1, c_2) con centro r y tal que $0 < c_1 < c_2$, $\lim \left(\dfrac{a_n}{b_n} - r\right) = 0$.

$\dfrac{a_n}{b_n} \in (c_1, c_2)\ \forall\, n \geq n_0$ o lo que es lo mismo $c_1 < \dfrac{a_n}{b_n} < c_2,\ \forall\, n \geq n_0$. Como consecuencia $c_1 b_n < a_n < c_2 b_n,\ \forall\, n \geq n_0$.

Si $\sum_1^{+\infty} b_n$ es convergente también lo es $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ y también $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_2 b_n$. Como $a_n < c_2 b_n$, es convergente $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, y también lo es $\sum_1^{+\infty} a_n$.

Por otro lado si la serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ es convergente también lo es $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$. Como $c_1 b_n < a_n$, es convergente $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_1 b_n$ y también lo es $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Si cualquiera de las series, $\sum_1^{+\infty} a_n$, $\sum_1^{+\infty} b_n$ fuera divergente la otra también tiene que serlo porque si fuera convergente la otra también lo sería.

Ejemplos:

- $\sum_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n} - \dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{\dfrac{2\sqrt{n}-2}{3}} = \dfrac{3}{3\sqrt{n}-2} \Rightarrow \dfrac{\frac{3}{3}\sqrt{n}-2}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \dfrac{3\sqrt{n}}{3\sqrt{n}-2} = 1$

- $\sum_1^{+\infty} \dfrac{\sin^4 n}{n^2} \Rightarrow 0 \leq \dfrac{\sin^4 n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, como $\dfrac{1}{n^2}$ es convergente, entonces $\dfrac{\sin^4 n}{n^2}$ es convergente.

- $\sum_1^{+\infty} \dfrac{3^n}{n^2+1} \Rightarrow$ Divergente.

  $\lim \dfrac{3^n}{n^2+1} = +\infty$.

- $\sum_1^{+\infty} \dfrac{2^n \cdot n}{n^n} = 2\ \dfrac{2^{n-1}}{n^{n-1}} = 2\ \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n-1} = 0.$

  $\dfrac{2}{n} < a < 1;\quad 2\ \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n-1} < 2 \cdot a^{n-1}$

Criterio de convergencia 4. Criterio de D'Alembert.

Si $\sum_1^{+\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ entonces si $l < 1$ es convergente, si $l > 1$ es divergente. Para $l = 1$ desconocido.

Desmostración:

Para $l < 1$, consideremos un entorno de l (c_1, c_2) de modo que $0 < c_1 < l < c_2 < 1$. Como $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que:

$\forall\, n \geq n_0\ \ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < c_2$, entonces: $a_{n+1} < c_2\, a_n$ y de aquí:

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &< c_2\, a_{n_0} \\ a_{n_0+2} &< c_2\, a_{n_0} + 1 \\ a_{n_0+3} &< c_2\, a_{n_0} + 2 \\ &\vdots \\ a_n &< c_2\, a_{n-1} \end{aligned}$$

Como c_2^n es la serie geométrica con $c_2 < 1$ es convergente y también lo es $\sum c_2^n \, a_{n_0}$ entonces $\sum a_n$ es convergente.

Ejemplo:

- $\sum \dfrac{2^n\, n}{n^n} = 2 \cdot \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n-1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^n}{2\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\dfrac{2}{n+1}\right)\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^{n-1}}{\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n-1}} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{\dfrac{2}{n+1}}{\dfrac{2}{n}}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}$$
$$\lim \frac{2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} = 0 \cdot e^{-1} = 0 < 1 \leftarrow \text{Serie convergente.}$$

Criterio de convergencia 5. Criterio de la raiz (Cauchy).

Si $\sum_1^{+\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$ entonces, si $l < 1$ es convegente, si $l > 1$ es divergente.

Demostración:

Para $l < 1$: Consideremos un entorno de $l\,(c_1, c_2)$ de modo que $0 < c_1 < l < c_2 < 1$. Como $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\forall\, n \geq n_0$ es $\sqrt[n]{a_n} < c_2$ y como consecuencia $a_n < c_2^n$, como la seire $\sum_1^{+\infty} c_2^n$ es convergente por ser la serie geometríca de razón menor que 1, también la serie $\sum a_n$ es convergente.

Ejemplo:

- $\lim \sqrt[n]{2\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n-1}}$

$$\lim 2^{\frac{1}{n}}\left(\frac{2}{n}\right)\frac{n-1}{n} = 0 < 1; \text{ por lo tanto es convergente.}$$

Criterio de Raabe

Si $\sum_1^{+\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y $\lim_n \left(1 - \dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right) = l$ entonces:

i) $l > 1$ la serie es convergente.

ii) $l < 1$ la serie es divergente.

Ejemplos:

- $\sum e^{-\sqrt{n^2+1}} = \lim \sqrt[n]{e^{-\sqrt{n^2+1}}} = \lim e^{\frac{-\sqrt{n^2+1}}{n}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e} < 1 \rightarrow$ Serie convergente

- $\displaystyle\sum \frac{n!}{n^n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n}} = \lim \frac{n e^{-n}(2\pi n)^{\frac{1}{2}n}}{n} = \lim \frac{(2\pi n)^{\frac{1}{2}n}}{e}$

  $= e^{-1} < 1 \rightarrow$ Serie convergente

- $\sum \dfrac{1}{n - \frac{3}{2}} \rightarrow$ Serie divergente, pues al compararla por $\dfrac{1}{n}, \ldots$

- $\sum \dfrac{1}{\log n} \rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\log n}$. Entonces $\dfrac{1}{\log n}$ es convergente.

- $\sum \binom{1}{3} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1} = \text{lím}\, \dfrac{\binom{1}{3} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{(n+1)-1}}{\binom{1}{3} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}} =$
  $= \text{lím}\, \dfrac{\binom{1}{3} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}}{\binom{1}{3} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}} \cdot \dfrac{\frac{1}{(n+1)-1}}{\binom{1}{3} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}} =$
  $= \text{lím}\, \dfrac{1}{n\left[\binom{1}{3} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right]} =$
  $= 0 \rightarrow$ Es convergente según el criterio 4.
- $\sum \frac{n+1}{n}$
- $\sum \left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2 = \text{lím}\, \dfrac{\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2}{\frac{1}{n^2}} = \text{lím}\, \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}.$

  Luego $\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$ es convergente.

3.4. Series de términos cualesquiera

De forma somera estudiaremos a continuación algunos criterios de convergencia para series de términos cualesquiera.

Series absolutamente convergentes:

Definición: Una serie es absolutamente convergente si la serie $\left(\sum_1^{+\infty} |a_n|\right)$ es convergente.

Teorema: Si $\sum_1^{‘+\infty}$ es absolutamente convergente entonces es convergente.

Demostración:

(x_n) es de Cauchy si $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall\, n, m \geq n_0$

Sean $(s_n), (t_n)$ las sumas parciales respectivamente de las series $\sum_1^{+\infty} a_n, \sum_1^{+\infty} |a_n|$. Vamos a probar que (s_n) es de Cauchy y por consiguiente convergente:

Sea $\varepsilon > 0$ como $\sum_1^{+\infty} |a_n|$ es convergente (al ser absolutamente convergente por defineción) entonces a_n es convergente y por consiguiente de Cauchy. Existe entonces n_0 tal que $\forall\, n, m \geq n_0$ se cumple que $|t_n - t_m| < \varepsilon$.

Suponiendo $n > m$ es: $|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_{m+n}| < \varepsilon$.

Como $|s_n - s_m|$ es igual: $|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$.

Acabamos de probar que dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural tal que $\forall\, n, m \geq n_0$ se cumple que $|s_n - s_m| < \varepsilon$.Dicho de otro modo acabamos de probar que la sucesión s_n es de Cauchy y por consiguiente convergente. Se sigue que la serie $\sum_1^{+\infty} a_n$ es convergente.

Series alternadas:

Definición: Si (a_n) es una sucesión de términos positivos la serie $\sum_1^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ se llama serie alternada.

Ejemplo:

$\sum_1^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

Teorema: Si a_n es monótona decreciente y tiene por límite 0 entonces la serie $\sum_1^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente.

Demostración:

Está basada en demostrar que la serie es absolutamente convergente y por consiguiente convergente.

Lección 4

Funciones. Límites y Continuidad.

4.1. Funciones. Generalidades.

[Aunque algunas definiciones se harán en $\mathbb{R}^n$, nos dedicaremos verdaderamente al estudio de funciones del conjunto de los números reales en sí mismo, y que son conocidas con el nombre de funciones reales de variable real.]

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Una correspondencia que asocia a cada punto de A un punto de $\mathbb{R}$ se le llama **función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$**.

Se suelen designar las funciones por las letras minúsculas $f, g, h, ...$ y se pone $f : A \to \mathbb{R}$.

4.1.1. Dominio

Al conjunto A se le llama **dominio** de la función y no tiene porqué coincidir con todo $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, se abusa del lenguaje y, cuando con generalidad se habla de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, se pone $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, aunque el dominio de f no sea todo $\mathbb{R}^n$.

Ej$_1$.-

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow x^2 + 5$$

Ej$_2$.-

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow \frac{1}{x-1}$$

Ej$_3$.-

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightsquigarrow x^2y^2 - x + y$$

Las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se conocen con el nombre de **funciones reales de variable real**.

Ejercicio 4.1.- Hallar el dominio de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$
3. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$
4. $f(x) = \sqrt{x-1}$

5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

6. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}$

7. $f(x) = \sqrt{x\,\mathrm{sen}(x)}$

8. $f(x) = \frac{x}{\log|x|}$

9. $f(x) = \sqrt{2^x - 3^x}$

10. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

11. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

12. $f(x) = log(1 - x^2)$

4.1.2. Gráfica

Se llama **gráfica** de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ al conjunto:

$$G = \{(\bar{x}, f(\bar{x})), \bar{x} \in D(f)\}$$

Ej$_1$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$G = \{(x, f(x)), x \in D(f)\}$

Ej$_2$: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$G = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D(f)\}$

Si los puntos de la gráfica de una función real de variable real se llevan a un plano en el que se encuentran unos ejes de coordenadas se obtiene una curva conocida con el nombre de **representación gráfica** de la función.

Si los puntos de la gráfica de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se llevan al espacio donde están situados unos ejes de coordenadas se obtiene una superficie, representación gráfica de la función.

¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡INCLUIR IMÁGENES DE GRÁFICAS!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Existe una estrecha relación entre las propiedades de una función y su representación gráfica. A continuación indicaremos algunas propiedades más y nos apoyaremos en las gráficas de las funciones para mejor explicarlas.

4.1.3. Paridad

Una función se dice **par** (**impar**) si $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$, $\forall x \in Dom(f)$.

Teniendo en cuenta esta definición, la representación gráfica de una función par es simétrica respecto del eje de OY, y la de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Ej$_1$: $\left.\begin{array}{c} f(x) = cos(x) \\ f(-x) = cos(x) \end{array}\right\}$ Función par

Ej$_2$: $\left.\begin{array}{c} f(x) = sen(x) \\ f(-x) = -sen(x) \end{array}\right\}$ Función impar

4.1.4. Periodicidad

Una función se dice que es **periódica** si existe un número real $K > 0$ tal que $f(x+K) = f(x)$ $\forall x \in Dom(f)$.

Al menor número K que cumple la igualdad se le llama **periodo**.

Ej$_1$: $f(x) = xE(x)$[1] No es periódica.

Ej$_2$: $f(x) = x - E(x)$ Sí es periódica.

4.1.5. Crecimiento

Una función se dice que es **monótona creciente** (**decreciente**) en el intervalo (a, b) si $\forall x, y \in (a, b)$ con $x < y$ es $f(x) < f(y)$ $(f(x) > f(y))$.

Una función se dice que es monótona creciente en un punto p si es posible encontrar un entorno $U(p)$ de modo que $\forall h$ con $p-h, p+h \in U(p)$ se cumple que $f(p-h) < f(p) < f(p+h)$ $(f(p-h) > f(p) > f(p+h))$.

Puede probarse, por otro lado, que una función es monótona creciente (decreciente) en un intervalo abierto (a, b) si y sólo si lo es en cada uno de sus puntos.

4.1.6. Extremos

Un punto p se dice que es un **máximo** (**mínimo**) **relativo** de la función f si existe un entorno $U(p)$ de modo que $f(x) \leq f(p)$ $(f(x) \geq f(p))$ $\forall x \in U(p)$.

A los máximos y mínimos relativos se les llama **extremos relativos** de la función.

Un punto p se dice que es un **máximo** (**mínimo**) **absoluto** de la función f en un intervalo $[a, b]$ si $\forall x \in [a, b]$ es $f(x) \leq f(p)$ $(f(x) \geq f(p))$.

4.1.7. Acotación

Una función se dice que está **acotada superiormente** (**inferiormente**) si existe $K \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x) \leq K$ $(f(x) \geq K)$ $\forall x \in Dom(f)$. Cuando una función está acotada superior e inferiormente se dice que está **acotada**.

4.2. Límite de una Función en un Punto

Se dice que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene por **límite** $l \in \mathbb{R}$ en el punto $x = a$ si dado un entorno del punto l, $U(l)$ es siempre posible encontrar un entorno del punto a, $U(a)$ de modo que $\forall x \in U(a) \setminus \{a\}$ se cumple $f(x) \in U(l)$.

Si por entorno de $+\infty$, $U(+\infty)$, consideramos todos los números reales que son mayores (menores) que un cierto número real K, la definición anterior puede extenderse para los casos de ser $a = \pm\infty$ y/o de ser $l = \pm\infty$.

Para indicar en lo sucesivo que el límite de $f(x)$ es l cuando x tiende a a, pondremos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Veamos a continuación algunas propiedades de los límites.

4.2.1. Unicidad

Si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, es único.

Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_2$ con $l_1 \neq l_2$ y consideremos los entornos $U(l_1)$, $U(l_2)$ disjuntos.

[1] E(x) es la parte entera de x

Por ser $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ existe un entorno $U_{r_1}(a)$ de modo que si $x \in U_{r_1}(a) \setminus \{a\}$ entonces $f(x) \in U(l_1)$.

Por ser $\lim_{x\to a} f(x) = l_2$ existe un entorno $U_{r_2}(a)$ de modo que si $x \in U_{r_2}(a) \setminus \{a\}$ entonces $f(x) \in U(l_2)$.

Si suponemos $r_1 < r_2$ entonces $U_{r_1}(a) \subseteq U_{r_2}(a)$ y por lo tanto si $x \in U_{r_1}(a) \setminus \{a\}$ se tiene por un lado que $f(x) \in U(l_1)$ y $f(x) \in U(l_2)$. Esto es absurdo ya que $U(l_1)$ y $U(l_2)$ son disjuntos.

Esta contradicción viene de suponer que el límite no es único.

4.2.2. Signo

Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \neq 0$ entonces existe $U(a)$ de modo que $signo(f(x)) = signo(l)$, $\forall x \in U(a) \setminus \{a\}$.

Supongamos $l > 0$ y consideremos $U(l)$ de modo que $0 < y$, $\forall y \in U(l)$.

Por definición de límite existe $U(a)$ tal que si $x \in U(a) \setminus \{a\}$ entonces $f(x) \in U(l)$, es decir, $f(x) > 0$.

4.2.3. Acotación

Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ entonces existe un $U(a)$ dentro del cual la función $f(x)$ está acotada.

Tomamos un entorno $U_r(l)$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces existe $U(a)$ de modo que si $x \in U(a) \setminus \{a\}$ es $f(x) \in U_r(l)$, es decir, $l - r < f(x) < l + r$.

4.2.4. Regla del Sandwich

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$ y dada otra función $h(x)$, existe un entorno $U(a)$ de modo que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U(a) \setminus \{a\}$ entonces existe $\lim_{x\to a} h(x)$ y además $\lim_{x\to a} h(x) = l$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = l$, dado $U(l)$ existe $U_{r_1}(a)$ de modo que si $x \in U_{r_1}(a)\setminus\{a\}$ es $f(x) \in U(l)$ y como $\lim_{x\to a} g(x) = l$ existe $U_{r_2}(a)$ de modo que si $x \in U_{r_2}(a) \setminus \{a\}$ es $g(x) \in U(l)$.

Si $r_1 \leq r_2$ y además suponemos que tanto $U_{r_1}(a)$ como $U_{r_2}(a)$ están contenidos en $U(a) \setminus \{a\}$, entonces si $x \in U_{r_1}(a)$ se cumple que $f(x), g(x) \in U(l)$.

Como $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ también $h(x) \in U(l)$; se sigue entonces que $\lim_{x\to a} h(x) = l$.

Ejercicio 4.2.- Representar gráficamente las siguientes funciones.

1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = \frac{|x|}{x}$
3. $f(x) = |1 - x^2|$
4. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$
5. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$
6. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh(x)$

4.2.5. Relación con el límite de sucesiones

La función f tiene por límite l en el punto $x = a$ ($\lim_{x\to a} f(x) = l$) si y sólo si $\forall(a_n)$ con $\lim(a_n) = a$ es $\lim(f(a_n)) = l$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) \neq l$. Entonces dado $U(l)$ no es posible encontrar un entorno $U(a)$ de modo que $f(x) \in U(a)$ si $x \in U(a) \setminus \{a\}$.

Como consecuencia consideremos una sucesión de entornos del punto a, $U_{r_n}(a)$, de modo que $\lim(r_n) = 0$ y además (r_n) es monótona decreciente.

Existe $a_1 \in U(a) \setminus \{a\}$ tal que $f(a_1) \notin U(l)$.

Existe $a_2 \in U(a) \setminus \{a\}$ tal que $f(a_2) \notin U(l)$.

....

Existe $a_n \in U(a) \setminus \{a\}$ tal que $f(a_n) \notin U(l)$.

Por construcción $\lim(a_n) = a$, pero $\lim f(a_n) \neq l$. Esta contradicción viene de suponer que $\lim_{x\to a} f(x) \neq l$.

$\Rightarrow$) Sea a_n tal que $\lim(a_n) = a$ y veamos que $\lim f(a_n) = l$.

En efecto, dado $U(l)$ existe $U(a)$ tal que si $x \in U(a) \setminus \{a\}$ es $f(x) \in U(l)$.

Como $\lim(a_n) = a$, dado $U(a)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ es $a_n \in U(a)$.

Como $a_n \in U(a)$ entonces $f(a_n) \in U(l)$, $\forall n \geq n_0$, y en consecuencia $\lim f(a_n) = l$.

4.3. Límites Laterales

Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ con $x < a$ ($x > a$), se dice que existe el **límite lateral** por la izquierda (derecha) de la función f en el punto $x = a$. Se suele indicar este límite poniendo $\lim_{x\to a^-} f(x)$ o bien $f(a^-)$ ($\lim_{x\to a^+} f(x)$ o bien $f(a^+)$).

Es fácil probar que existe el límite de la función en punto si y sólo si existen los límites laterales y coinciden.

Ejercicio 4.3.- Calcular los siguientes límites laterales.

1. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$
2. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$
3. $\lim_{x\to 0^-} x - E(x)$
4. $\lim_{x\to 0^+} x - E(x)$

4.4. Límite de las Operaciones Aritméticas

Si $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$ entonces:

i) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$

Sea (a_n) una sucesión cualquiera tal que $\lim(a_n) = a$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ entonces $\lim f(a_n) = l_1$.

Como $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$ entonces $\lim g(a_n) = l_2$.

$\lim(f \pm g)(a_n) = \lim(f(a_n) \pm g(a_n)) = \lim f(a_n) \pm \lim g(a_n) = l_1 \pm l_2$ y aplicando la propiedad de la pregunta 4.2.5 se sigue que $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = l_1 \pm l_2$

ii) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$

iii) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{l_1}{l_2}$ con $l_2 \neq 0$
iv) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)^{g(x)}) = l_1^{l_2}$ si $l_1 > 0$
Sea (a_n) una sucesión cualquiera con $\lim(a_n) = a$.
Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ entonces $\lim f(a_n) = l_1$.
Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$ entonces $\lim g(a_n) = l_2$.
Se sigue que $\lim(f(a_n)^{g(a_n)}) = l_1^{l_2}$
v) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$ entonces $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = l_2$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$g\circ f$$

Sea (a_n) una sucesión cualquiera con $\lim(a_n) = a$.
Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ entonces $\lim f(a_n) = l_1$.
Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$ entonces $\lim g(a_n) = l_2$.
Y como $g(f(a_n)) = (g\circ f)(a_n)$ entonces $\lim(g\circ f)(a_n) = l_2$.

Teniendo en cuenta el límite de las operaciones aritméticas que hemos visto, debemos ser capaces de obtener el límite de una expresión donde aparezcan varias funciones sometidas a operaciones aritméticas.

Sin embargo, sucede a veces que el resultado obtenido no dice nada acerca del límite de la expresión. Estos resultados son conocidos con el nombre de **indeterminaciones**, y para resolver el límite se obtiene otra expresión a partir de la primera que difiera de ésta a lo más en un número finito de puntos y cuyo límite sabemos calcular. Obtenido el límite de esta segunda expresión, queda obtenido el de la primera, puesto que los límites de ambas expresiones coinciden.

Ej$_1$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

Si aplicamos los resultados obtenidos sobre el límite de las operaciones aritméticas se llega a que el límite anterior vale $\frac{0}{0}$, que es una indeterminación. Consideremos entonces la función $f(x) = x+1$ que difiere de la anterior en el punto $x = 1$. Se sigue entonces que el límite de ambas funciones cuando $x \to 1$ coincide, y puesto que $\lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2$, también $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Son indeterminaciones:

$$\boxed{(+\infty)-(+\infty),\ 0\cdot(\pm\infty),\ \tfrac{0}{0},\ \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0^0,\ (+\infty)^0,\ 1^{\pm\infty}}$$

Ej$_1$: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3} = 9$

Ej$_2$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x} = \nexists$

Ej$_3$: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2} - \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2} - \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{(x-1)-x(x-2)^2}{x(x-1)(x-2)^2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{-x^2+2x+x-1}{x(x-1)(x-2)^2}\right) =$

$= -\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-3x-1}{x(x-1)(x-2)^2}\right) = +\infty$

Ej4: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}}-1}\right)=\dfrac{1}{-1}=-1$

Ej5: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}$

$\frac{1\cdot senx}{2}<\frac{x}{2}<\frac{tanx}{2}$

$senx<x<tanx$

$1<\frac{x}{senx}<\frac{1}{cosx}$

$1>\frac{senx}{x}>cosx$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}=1$

Algunas reglas generales de límites son:
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{sen\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ si $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$
$\lim\limits_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\left(\frac{1}{\alpha(x)}\right)}=e$ si $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{\frac{x^2}{2}}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$

Ejercicio 4.4.- Calcular los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tanx-senx}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tanx$
8. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{senx-sena}{x-a}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-1}}\right)^{\frac{-x}{1+x}}$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}(1+senx)^{cosecx}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen2x}{x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{senx}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen2x}{sen3x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tanx}{x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos^3x}{xsen2x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{senx}-\dfrac{1}{tanx}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+senx}-\sqrt{1-senx}}{tanx}$

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2xtanx-\dfrac{\pi}{cosx}\right)$

22. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{logx-1}{x-e}$

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{senx}{x}$

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}(cosx)^{\frac{1}{senx}}$

4.5. Continuidad

Se dice que una función $f(x)$ es **continua** en un punto a si se cumplen las siguientes tres condiciones:

i) Existe $f(a)$

ii) Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Cuando no se cumple alguna de las tres condiciones citadas anteriormente se dice que la función es **discontinua** en el punto $x=a$.

Si como en la figura *** existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, pero no existe el valor de la función en ese punto, o si existe no coincide con el límite, se dice que la discontinuidad es **evitable**.

Si como en las figuras ********** no existe el límite de la función en el punto, aunque existen los límites laterales, o bien existe el límite y es $+\infty$ ó $-\infty$, la discontinuidad se dice que es **de primera especie**, o **de salto**, caso de que los límites laterales sean distintos. La diferencia entre $f(a^+)$ y $f(a^-)$ se le llama **salto** de la función.

Si no existe el límite de la función en el punto porque no existe al menos uno de los límites laterales la discontinuidad se llama **de segunda especie** (figura****).

Veamos a continuación algunos ejemplos sencillos que muestran los distintos tipos de discontinuidad.

i) La función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ cuya gráfica es
*****

tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

ii) La función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya gráfica es
*****

tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

iii) La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ cuya gráfica es
*****

tiene una discontinuidad de primera especie en $x = 0$.

iv) La función $f(x) = sen\frac{1}{x}$ cuya gráfica es
*****

tiene una discontinuidad de segunda especie en $x = 0$.

v) La función $f(x) = \frac{senx}{x}$ cuya gráfica es
*****

tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$ porque existe el límite y no existe el valor de la función en $x = 0$.

Esta última discontinuidad, que es la más sencilla de todas, se llama evitable porque, como su propio nombre indica, se puede evitar, ya que a partir de ella puede obtenerse una función continua que coincida con ella en todos los puntos salvo en los de discontinuidad evitable. Como ejemplo, la función $\bar{f}(x)\begin{cases} \frac{senx}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua y coincide con $f(x) = \frac{senx}{x}$ salvo en $x = 0$.

Ejercicio 4.5.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ en $x = 1$

2. $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $x = 0$

4.6. Continuidad de las Operaciones Aritméticas

Si f, g son continuas en $x = a$ entonces

i) $f \pm g$ es continua en $x = a$

ii) $f \cdot g$ es continua en $x = a$

iii) $\frac{f}{g}$ es continua en $x = a$ si $g(a) \neq 0$

iv) f^g es continua en $x = a$ si $f(a) > 0$

v) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
$a \rightsquigarrow f(a), b \rightsquigarrow g(b)$
$g \circ f$
Si f es continua en $x = a$ y g lo es en $f(a)$, entonces $(g \circ f)$ es continua en $x = a$.
i) Existe $(g \circ f)(a)$ porque $(g \circ f)(a) = g(f(a))$
i) Existe $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x)$ porque existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y vale $f(a)$.
También existe
$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to a} (g(f(x)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$
Teniendo en cuenta la propiedad que en su momento se demostró acerca del limite de la función compuesta, queda probado que no sólo existe $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x)$ sino que también este límite vale $(g \circ f)(a)$ en $x = a$. Con lo cual queda probada la continuidad.

Ejercicio 4.6.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \frac{1}{1 - log|x|}$
2. $f(x) = \frac{1}{1 + sen\frac{1}{x}}$

4.7. Teorema de Bolzano

Si f es continua en $[a, b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
Supongamos $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$.
Sea $A = \{x \in [a, b], f(x) < 0\}$. $A \neq \emptyset$ porque, al menos, $a \in A$ y además está acotado superiormente. Puesto que existe, sea c el supremo de A.
Si $f(c) > 0$, como $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, dado un entorno $U(f(c))$ formado por valores positivos, existe un entorno $U(c)$ de modo que si $x \in U(c)$, entonces $f(x) \in U(f(c))$ es decir $f(x) > 0$. Esto es una contradicción porque el extremo izquierdo del intervalo $U(c)$ sería cota superior de A, lo que no puede ser porque sería menor que c y c es el supremo de A.
Si $f(c) < 0$, dado un entorno de $f(c)$ $(U(f(c)))$ formado por valores negativos, existe un entorno $U(c)$ de modo que si $x \in U(c)$, entonces $f(x) \in U(f(c))$, es decir, $f(x) < 0$. Esto es una contradicción ya que $c = sup\{A\}$ y entonces existirían valores mayores que c donde f es negativa.
De los dos párrafos anteriores se sigue que necesariamente $f(c) = 0$.

4.8. Teorema de los Valores Medios

Si f es continua en $[a, b]$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.
Supongamos $f(a) < f(b)$ y sea $f(a) < l < f(b)$.
La función $F(x) = f(x) - l$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y además $F(a) = f(a) - l < 0$ y $F(b) = f(b) - l > 0$.
Puesto que se cumplen las condiciones del Teorema de Bolzano, existe $c \in (a, b)$ tal que $F(c) = 0 \Rightarrow f(c) - l = 0 \Rightarrow f(c) = l$.

4.9. Teorema de Weiertrass

Si f es continua en $[a, b]$, existen puntos donde alcanza los extremos absolutos.
Sea $K = sup\{f(x), x \in [a, b]\}$. Por ser K supremo es posible encontrar una sucesión $(a_n) \subset [a, b]$ de modo que $\lim f(a_n) = K$.

La sucesión (a_n) es ¿¿IN??finita y está acotada, luego posee una subsucesión $(a_{\alpha(n)})$ convergente. Supongamos que $\lim(a_{\alpha(n)}) = c$.

Como f es continua en $x = c$, es $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ y por tanto $\lim f(a_{\alpha(n)}) = f(c)$.

Como $\lim f(a_n) = K$ y $(f(a_{\alpha(n)}))$ es una subsucesión de $(f(a_n))$, necesariamente $\lim(f(a_n)) = f(c)$.

Se concluye que $f(c) = K$ y por tanto que $x = c$ es un punto donde la función alcanza un máximo absoluto.

Análogamente se razonaría para el caso del mínimo absoluto.

Ejercicio 4.7.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \frac{1}{1+2^tan(x)}$
2. $f(x) = x - E(x)$
3. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Ejercicio 4.8.- Valiéndose de las propiedades de las funciones continuas, probar que la ecuación $x - 2^x = 1$ tiene al menos una raíz real.

Ejercicio 4.9.- Demostar:

a) Un polinomio de grado impar posee al menos una raíz real.

b) Un polinomio de grado par tiene por lo menos dos raíces reales si toma al menos un valor cuyo signo sea contrario del que tiene el coeficiente de su término de grado más elevado.

4.10. Infinitésimos

Si $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ se dice que $\alpha(x)$ es un **infinitésimo** en $x = a$.

Si $\alpha(x)$, $\beta(x)$, son dos infinitésimos en $x = a$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \to l \\ \searrow \pm\infty \end{array}$ se dice entonces que

$\alpha(x)$ es un infinitésimo de orden $\begin{array}{l} \nearrow \text{superior} \\ \to \text{igual} \\ \searrow \text{inferior} \end{array}$.

Si $\alpha(x)$, $\beta(x)$, son dos infinitésimos en $x = a$ y $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ entonces se dice que ambos infinitésimo son **equivalentes**.

En particular, si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{(x-a)^n} = \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \to l \\ \searrow \pm\infty \end{array}$ se dice entonces que $\alpha(x)$ es un infinitésimo de

orden $\begin{array}{l} \nearrow \text{superior} \\ \to \text{igual} \\ \searrow \text{inferior} \end{array}$ a n.

Si $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) \cdot f(x) = l$ siendo $\alpha(x)$ un infinitésimo en $x = a$ y $\beta(x)$ es un infinitésimo equivalente a $\alpha(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) \cdot \beta(x) = l$.

$$\lim_{x\to a} \beta(x) \cdot f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \alpha(x) \cdot f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x\to a} \alpha(x) \cdot f(x) = 1 \cdot l = l.$$

4.10.1. Tabla de equivalencias

Para $x \to 0$, son infinitésimos equivalentes:

$$senx \rightsquigarrow x$$

$$1 - cosx \rightsquigarrow \frac{x^2}{2}$$

$$tanx \rightsquigarrow x$$

$$arcsenx \rightsquigarrow x$$

$$arctanx \rightsquigarrow x$$

$$e^x - 1 \rightsquigarrow x$$

$$log(1 + x) \rightsquigarrow x$$

Estas equivalencias son igualmente válidas si x se sustituye por un infinitésimo $\alpha(x)$ cuando $x \to a$.

Lección 5

Derivabilidad.

5.1. Derivada de la función en un punto. Interpretación geométrica

Definición: Se dice que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el punto $x = a$ si existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1$ y es un número real ($l \in \mathbb{R}$).

Al valor de l se le llama derivada de la función f en el punto $x = a$.

En lo sucesivo lo indicaremos por $f'(a)$.[1]

La existencia de $f'(a)$ asegura la existencia de la recta tangente a la función f en el punto $x = a$.

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Ejemplos:

- La función:

  $$f(x) = \begin{cases} x \arctan \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  es continua en $x = 0$, es derivable.

  $$f(0) = 0 \begin{cases} f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} x \arctan \dfrac{1}{x} = 0 \\ f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} x \arctan \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

  $$f'(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x} + x \dfrac{\frac{-1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{x^2 + 1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

  $$f' = 0 \begin{cases} f'(0^+) = 0 \\ f'(0^-) = 0 \end{cases} \quad \text{es derivable.}$$

- Tratar la tangente de la hipérbola $\dfrac{x + a}{x + 5}$ de modo que atraviese el origen de coordenadas.

  $$f'(x) = \frac{(x + 5) - (x + a}{(x + 5)^2} = \frac{-4}{(x^2 + 10x + 25)} = mx \to m = \frac{-4}{x^3 + 10x^2 + 25x}$$

  Buscamos la recta $y = mx$.

[1] poner grafico de derivada

- En la línea $\dfrac{1}{1+x^2} = y$ hallar el punto en el cual la tangente sea paralela al eje de abcisas.
  $f' = \dfrac{-1(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2x}{1+2x^2+x^4} = m$
  $m = 0 = \dfrac{-2x}{1+2x^2+x^4} \rightarrow x = 0$
- Demostrar que las tangentes a la curva $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$, trazadas en los puntos en los cuales $y = 1$ se cortan en el origen de coordenadas.
  $1 = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$; $1+3x^2 = 3+x^2 \rightarrow x = \pm 1 \begin{cases} (1, f(1)) & = (1,1) \\ (-1, f(-1)) & = (-1,1) \end{cases}$
  $y' = \dfrac{(6x)(3+x^2)-(1+3x^2)(2x)}{(3+x^2)^2} = \dfrac{18x+6x^3-2x-6x^3}{(3+x^2)^2} = \dfrac{16x}{(3+x^2)^2}$
  $y - 1 = m(x-1);\ y - 1 = x - 1 \rightarrow y = x$
  $y - 1 = m'(x+1);\ y - 1 = -x - 1 \rightarrow y = -x$
  $y'_{x=1} = 1 = m;\ y' = -1 = m'$
- Trazar la normal (perpendicular a recta tangente) a la línea $y = x \log x$ que sea paralela a la recta $2x - 2y + 3 = 0$.
  $y' = \log x + x\dfrac{1}{x} = \log x + 1$
  $m' = -1$
  Deducimos:
  $m' = y' = \log x + 1 = -1;\ \log x = -2 = e^{-2}$
  La recta será:
  $x = e^{-2};\ y = e^{-2}\log e^{-2} = -2e^{-2}$.
  $y + 2e^{-2} = -1(x - e^{-2})$
  $y = e^{-2} - x - 2e^{-2} = -(x + e^{-2}) = y$

Proposición: Si f es derivable en $x = a$, entonces en continua en $x = a$.

Demostración:

Si f es derivable en $x = a$, existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f' \in \mathbb{R}$. Se sigue entonces dos consideraciones:

1.- Existe $f(a)$.

2.- $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f' = 0$ y por consiguiente
$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(x)$ es un infinitésimo en $x = a$.
Manipulando la expresión se tiene que
$f(x) = f(a) + [\alpha(x) + f'](x-a)$
y que por tanto
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} [f(a) + (\alpha(a) + f'(a))(x-a)] = f(a) + 0 = f(a)$.

Se concluye entonces que no solo existe $\lim_{x\to a}$ sino que coincide con $f(a)$.
La función $f(x) = |x|$ es un ejemplo de función continua en $x = 0$, pero no derivable.

5.2. Función derivada. Derivadas sucesivas.

Defnción: Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función para la que existe derivada en cualquier punto del intervalo (a,b).Podemos entonces definir una nueva función asociando a cada punto el valor de la función f en dicho punto. A esta nueva función así definida se le conoce con el nombre de función derivada f en el intervalo (a,b) y se suele indicar por f'

$$\begin{aligned} f'(a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f'(x) \end{aligned}$$

Ejemplo:

¿Cuánto vale la derivada de la función x^2?

Tomemos un punto $x=a$ cualquiera de $\mathbb{R}$ y entonces:

$f'(a)=\text{lím}_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\text{lím}_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=\text{lím}_{x\to a}(x+a)=2a.$

Se concluye de lo anteior que no solo existe la derivada de f en cualquier punto de $\mathbb{R}$ sino que su función derivada, poniéndola en términos de x resulta ser $f'(x)=2x$.

Análogamente a como se a obtenido la derivada de esta función se obtienen las funciones derivadas siguientes:

$$\begin{aligned} (x^a)' &= ax^{a-1} \\ (\operatorname{sen} x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\operatorname{sen} x \\ (\tan x)' &= \sec^2 x \\ (\cot x)' &= -\csc^2 x \\ (\arctan)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (\arccos)' &= -\frac{1}{\sqrt{a-x^2}} \\ (\arctan)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (e^x)' &= e^x \\ (\log x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Derivación de la función compuesta:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f(a) & \longmapsto & g(f(a)) \end{array}$$

$$a \overset{(g\circ f)(a)}{\longrightarrow} g(f(a))$$

Si f es derivable en $x=a$, y g lo es en $f(a)$ entonces la función $(g\circ f)(x)$ es derivable en $x=a$, y además $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$.

Derivadas sucesivas

Definición: Si f' posee derivada en cualquier punto del intervalo (a,b) a su función derivada le llamaremos función derivada segunda de la función f en el intervalo (a,b) y se suele indicar poniendo $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f''(a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \big(f'(x)\big)' \end{aligned}$$

La definición anterior se puede generalizar y así si existe la función de3rivada de la función derivada de orden $n-1$: $f^{(n-1)}(x)$ de f en el intervalo (a,b) a esta función se le llama función derivada n-ésima de la función f en el intervalo (a,b) y se suele indicar por $f^{(n)}(x)$.

5.3. Derivada de las operaciones elementales

Si f, g son derivables en (a,b) entonces:

i) $f \pm g$ es derivable en (a,b) y además $(f \pm g)' = f' \pm g'$

ii) $f \cdot g$ es derivable en (a,b) y además $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

iii) Si $g(x) \neq 0$ en (a,b), $\dfrac{f}{g}$ es derivable en (a,b) y además $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

iv) Si $f(x) > 0$ en (a,b), f^g es derivable en (a,b).

Ejemplos:

- Demostrar que la función $y = \sqrt{2x - x^2}$ satisface la relación: $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

  $y = \sqrt{f(x)} \quad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$

  $$y' = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

  $$y'' = \frac{(-1)(\sqrt{2x-x^2}) - (1-x)\left(\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}\right)}{2x-x^2} =$$

  $$= \frac{-\sqrt{2x-x^2} + (x-1)\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)}{(2x-x^2)} =$$

  $$= \frac{-(2x-x^2) - (x-1)^2}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2x + x^2 - 1 - x^2 + 2x}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

  $$= -\frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

  $$y^3 \cdot y'' + 1 = 0 \to (2x-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{-1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}} + 1 = 0$$

- Demostrar que $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ satisface: $xy'' + \dfrac{1}{2}y' - \dfrac{1}{4}y = 0$

- Demostrar que $y = \cos e^x + \operatorname{sen} e^x$ satisface: $y'' - y' + ye^{2x} = 0$

- Demostrar que $\operatorname{sen}(n \operatorname{arc\,sen} x)$ satisface: $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$

- Demostrar que $y = \left(x^2 + \sqrt{x^2+1}\right)^k$ satisface $(1+x^2)y''`xy' - k^2y = 0$

Derivadas n-ésimas

- $y = \dfrac{1}{1-x}$

  $$y = (1-x)^{-1}$$
  $$y' = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = 1(1-x)^{-2}$$
  $$y'' = 1(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 1 \cdot 2(1-x)^{-3}$$
  $$y''' = 1 \cdot 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 1 \cdot 2 \cdot 3(1-x)^{-4}$$
  $$\vdots$$
  $$y^{(n)} = n!(1-x)^{-n+1}$$

- $y = \dfrac{1}{1+x}$

$$\begin{aligned}
y &= (1+x)^{-1} \\
y' &= -1(1+x)^{-2} \\
y'' &= (-1)(-2)(1+x)^{-3} \\
y''' &= (-1)(-3)(-2)(1+x)^{-4} \\
&\vdots \\
y^{(n)} &= (-1)^n n!(1+x)^{-n+1}
\end{aligned}$$

- $y = \log(1-x)$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{-1}{1-x} \\
&\vdots \\
y^{(n)} &= \log^{(n)}(1-x) = \left(\frac{-1}{1-x}\right)^{n-1} = -1\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1} = -1(n-1)!\;(1-x)^{-n} \\
&= -(n-1)!\;(1-x)^{-n}
\end{aligned}$$

- $y = \log(1+x)$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{1+x} \\
&\vdots \\
y^{(n)} &= \log^{(n)}(1+x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)!\;(1+x)^{-n}
\end{aligned}$$

- $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(1-x)+(1+x)}{1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} \\
y'' &= \frac{-2\,(2(1-x)(-1))}{(1-x)^4} = \frac{4(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3} \\
y''' &= \frac{-4\left(3(1-x)^2(-1)\right)}{(1-x)^6} = \frac{12(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{12}{(1-x)^4} \\
&\vdots \\
y^{(n)} &= \frac{2(n)!}{(1-x)^{n+1}}
\end{aligned}$$

- $y = \operatorname{sen} x$

$$\begin{aligned}
y' &= \cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) \\
y'' &= -\operatorname{sen} x = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(x + 2\frac{\pi}{2}) \\
y''' &= -\cos x = cos(x + 2\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(x + 3\frac{\pi}{2}) \\
y'''' &= \operatorname{sen} x = \cos(x + 3\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(x + 4\frac{\pi}{2}) \\
&\vdots \\
y^{(n)} &= \operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

- $y = \cos x$

$$y' = -\operatorname{sen} x$$
$$y'' = -cosx$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = (\operatorname{sen} x)^{(n+1)} = \operatorname{sen}\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

- $(1+x)^a,\ a \in \mathbb{R}$

$$y' = a(1+x)^{a-1}$$
$$y'' = a(a-1)(1+x)^{a-2}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = a(a-1)(a-2)\dots(a-(n-1))\,(1+x)^{a-n}$$
$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}$$
$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}$$
$$n!\binom{a}{n} = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)$$
$$y^{(n)} = n!\binom{a}{n}(1+x)^{1-n}$$

5.4. Tres teoremas importantes

5.4.1. Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$, $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración:

5.4.2. Teorema de los incrementos finitos de Lagrange (valor medio)

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración:

Ejemplos:

- La función $f(x) = 2 - x^2x^4$ toma valores iguales en los extremos del intervalo $[-1,1]$. Mostrar que la derivada de dicha función no se reduce a cero en parte alguna del intervalo $[-1,1]$ y explicar esta desviación del Teorema de Rolle.

  La respuesta es que la función no es continua en dicho intervalo.

- Probar que la función: $x^3 - 3x + 1 = 0$ no puede tener 2 raíces distintas en el intervalo $]0,1[$.

- Probar que la función $f(x) = x^n + px + q$ nop puede tener más de dos raíces reales si n es par ni más de tres si n es impar.

- Probar que si $x > 0$ entonces $x > \operatorname{sen} x$
- Probar $e^x > 1 + x$

5.4.3. Teorema del valor medio de Cauchy

Sean f, g funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y derivables en el intervalo (a, b) si $g(b) \neq (a)$ y f', g' no se anulan simultáneamente en el intervalo (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Demostración:

5.5. Regla de L'Hôpital

Sean $f(x), g(x)$ funciones derivable en un entorno $\bigcup(a) - \{a\}$ de modo que $\text{lím}_{x \to a} f(x) = 0 = \text{lím}_{x \to a} g(x)$. Si $g'(x) \neq 0$ en $\bigcup(a) - \{a\}$ y $\text{lím}_{x \to a} \dfrac{f'}{g'} = l$ entonces $\text{lím}_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.[2]

Demostración:

Consideremos el intervalo $[a, a + r]$ y consideremos la función $\bar{f}$ definida en $[a, a + r]$ de modo que:

$$\bar{f}(x) \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (a, a + r] \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Esta función $\bar{f}$ es continua en $[a, a + r]$ ya que coincide con $f(x)$ en $(a, a + r)$ que es derivable luego continua y $\bar{f}(a) = 0 = \text{lím}_{x \to a} f(x) = \text{lím}_{x \to a} \bar{f}(x)$ luego es continua en $x = a$.

También $\bar{f}(x)$ es derivable en el intervalo $(a, a + r)$ ya que en dicho intervalo coincide con $f(x)$ que es derivable.

Razonamiento muy similar se peude hacer con la función:

$$\bar{g}(x) \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in (a, a + r] \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Para llegar a que es continua en el intervalo $[a, a + r]$ y derivable en $(a, a + r)$. Además $\bar{g}(a + r) \neq \bar{a}(a)$ porque si existe la igualdad podrías aplicarse el teorema de Rolle a esta función y existiría un punto c que pertenece a $(a, a + r)$ con $c \in (a, a + r)$ donde $g'(c) = 0$. Como $g'(c) = g'(c)$ también $g'(c) = 0$ y esto es imposibble porque las hipótesis del enunciado aseguraban que $g' \neq 0$ si $x \in \bigcup(a) - \{a\}$.

De lo dicho anteriormente concluimos que las funciones $\bar{f}, \bar{g}$ cumplen las condiciones del teoremas del valor medio de Cauchy en el intervalo $[a, a + r]$ y consiguientemente:

$$\frac{\bar{f}(a + r) - \bar{f}(a)}{\bar{g}(a + r) - \bar{g}(a)} = \frac{\bar{f}'(c)}{\bar{g}'(c)}, \text{ donde } c \in (a, a + r)$$

Teniendo en cuenta la relación que existe entre $\bar{f}, \bar{g}$ y f, g, la igualdad anterior podemos expresarla en términos de f, g de la forma:

$$\frac{f(a + r) - 0}{g(a + r) - 0} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \to \frac{f(a + r)}{g(a + r)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

[2] grafico de esta regla

Como $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ entonces $\lim_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$.

Por otro lado $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a^+}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=l$.

De lo anterior se sigue la existencia del $\lim_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, y vale l.

Razonando similar se puede hacer para el intervalo $[a-r,a]$, llegaríamos a demostrar que existe $\lim_{x\to a^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y vale l.

Concluimos de lo anterior que existe $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

Ejemplos:

- $\lim_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{3\sqrt{x^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to a}\dfrac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{x^2}}=\dfrac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a^2}}$.

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$.

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log\cos x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{-\operatorname{sen} x}}{1}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{-\operatorname{sen} x}=-\infty$.

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\cos ax}{e^{bx}\cos bx}\overset{\frac{0}{0}}{=}$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-\cos ax}{e^{bx}\cos bx}&=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+a\operatorname{sen} ax}{be^{bx}+b\operatorname{sen} bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a(e^{ax}+\operatorname{sen} ax)}{b(c^{bx}+\operatorname{sen} bx)}=\frac{a(e^0+0)}{b(e^0+0)}\\&=\frac{a}{b}\end{aligned}$$

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x\tan x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\tan x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2-2\sec^2 x}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{x^2}{\dfrac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{x^2\cos^2 x}{(\cos x-1)(\cos x+1)}=\\&=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{2}\frac{x^2\cos^2 x}{(1-\cos x)(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{2}\frac{2x^2\cos^2 x}{x^2(\cos x+1)}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\pi-2\arctan x}{\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\pi-2\arctan x}{\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\pi-2\arctan x}{\log\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi-2\arctan x}{\log(x+1)-\log x}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\pi-2x}{x-\log x}=?.\end{aligned}$$

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}\overset{\frac{0}{0}}{=}=\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a-b^x\ln b}{c^x\ln c-d^x\ln d}=\dfrac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}$.

- $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = 1.$

- $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x\log x - x + 1}{(x-1)\log x}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x + 1 - 1}{\log x + \dfrac{x-1}{x}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x\log x}{x\log x + x - 1}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x + 1}{\log x + 1 + 1}\right) = \frac{1}{2}.$$

- $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\log(e^x - 1)}} =$

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\log(e^x-1)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\log(e^x-1)}\ln x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x}} =$$
$$= e^{+\infty} = +\infty.$$

- $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x} - \frac{x}{\log x}\right) =$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x} - \frac{x}{\log x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{\log x}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{-1}{\dfrac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 1} -x$$
$$= -1.$$

Rizando el rizo:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\tan x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \operatorname{sen} x} = \bigstar$

  Trabajaremos primero con $\arcsin x$:

  $$f(x) = \operatorname{sen} x$$
  $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
  $$f''(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

  $$\to \arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + \alpha_1(x)x^3$$

  Ahora con $\operatorname{sen} x$:

  $$\to \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \alpha_2(x)x^3$$

  Y a continuación con $\sqrt{1+2\tan x}$:

$$f(x) = (1+2\tan x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+e\tan x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sec^2 x = (1+2\tan x)^{-\frac{1}{2}} \sec^2 x$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1+2\tan x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\sec^2 x \cdot \sec^2 x + (1+2\tan x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\sec x \cdot \sec x \cdot$$

$$\cdot \tan x = -(1+2\tan x)^{-\frac{3}{2}} \sec^4 x + 2(1+2\tan x)^{-\frac{1}{2}} \sec^2 x \tan x$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2}(1+2\tan x)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2\sec^2 x \sec^4 x - (1+2\tan x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4\sec^3 x \sec x \tan x -$$

$$- (1+2\tan x)^{\frac{3}{2}} \cdot 2\sec^2 x \sec^2 x \tan x + 2(1+2\tan x)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot (2\sec x \sec x \tan x \tan x \sec^3 x)$$

$$\to \sqrt{1+2\tan x} = 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \alpha_3(x)x^3$$

Finalmente calculamos el límite:

$$\bigstar = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{5x^3}{3!} + \alpha_3(x)x^3 - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \alpha_4(x)x^3\right) + x^2}{x + \dfrac{x^3}{3!} + \alpha_1(x)x^3 - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \alpha_2(x)x^3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^3 + (\alpha_3(x) - \alpha_4(x))\, x^3}{\frac{1}{3}x^3 + (\alpha_1(x) - \alpha_2(x))\, x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3} + \alpha_3(x) - \alpha_4(x)}{\frac{1}{3} + \alpha_1(x) - \alpha_2(x)} = 2$$

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\arctan} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{x^2}{2}}{\log\dfrac{1+x}{1-x} - 2x}$

- $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{2\tan x}{x + \operatorname{sen} x}\right)^{\dfrac{1}{1\cos x}}$

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(x + \sqrt{1+x^2}) - x + \frac{1}{6}x^3}{x - \tanh(x)}$

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x \cdot \log\cos x} - (1+4x)^{\frac{1}{4}} + x - \frac{3}{2}x^2}{x \operatorname{sen} x^2}$

Lección 6

Fórmula de Taylor.

Existen en la Matemática funciones como las polinómicas, cuyo estudio y cálculo de su valor en cualquier número real es sencillo de obtener. Existen, sin embargo, otras funciones como $senx$, e^x, $logx$, $\sqrt[3]{1+x}$, de aspecto sencillo pero cuyo estudio o cálculo de su valor en la mayoría de los números reales no es sencillo de obtener. Todos necesitamos una calculadora para obtener el valor de $senx$ en $x = 1$ y, sin embargo, no sucede lo mismo con $x^3 - x$ en dicho punto.

La idea fundamental del tema que ahora empezamos se fundamenta en tratar de aproximar, con cierto margen de error, las funciones $senx, e^x, \ldots$, y otras más complicadas, por un polinomio dentro de un intervalo.

6.1. Un Límite Costoso.

La función f que vamos a utilizar admite derivadas de cualquier orden en un entorno del punto $x = a$.

Vamos a probar que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \left(f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{''}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n\right)}{(x-a)^n} = 0$$

En primera instancia el cálculo de este límite resulta ser la indeterminación $\frac{0}{0}$, pero como las funciones que aparecen cumplen la Regla de L'Hôpital, la vamos a aplicar, y resulta

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x) - \left(f^{'}(a) + f^{''}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{'''}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{(n-1)}\right)}{n(x-a)^{n-1}}$$

De nuevo este límite resulta ser la indeterminación $\frac{0}{0}$, y puesto que se puede, de nuevo aplicamos la Regla de L'Hôpital para resolverlo. Digamos entonces que el límite anterior se iguala a:

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{''}(x) - \left(f^{''}(a) + f^{'''}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{(n-2)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{(n-2)}\right)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}}$$

En primera instancia este límite resulta ser la indeterminación $\frac{0}{0}$, y puesto que es posible, aplicamos la Regla de L'Hôpital que además reiteramos n veces, llegando entonces a que el límite inicial es igual a:

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

6.2. Polinomio de Taylor

Se llama **polinomio de Taylor** de grado n, de la función f en el punto $x = a$ al polinomio:

$P_{n,\,f,\,a}(x) = f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{''}(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$

Siguiendo esta definición, el límite de la primera pregunta podemos expresarlo como $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}$, y siguiendo esta primera pregunta: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Se sigue entonces que $f(x) - P_{n,f,a}(x)$ es un infinitésimo en $x = a$ y además es de orden superior a n. Podemos decir entonces que en un entorno de $x = a$, el polinomio $P_{n,f,a}(x)$ se parece a la función $f(x)$ más que $(x-a)^n$ se parece a 0.

Conviene decir también que si en el límite anterior sustituimos el polinomio de Taylor $P_{n,f,a}(x)$ por otro polinomio de grado n, dicho límite no resulta cero, y de esto concluimos que, de entre todos los polinomios de grado n, el que más se parece a la función en un entorno del punto a es el polinomio de Taylor de grado n.

Por otro lado, cuanto más pequeño es el entorno del punto a, menor es el grado del polinomio que deba elegirse para que se parezca a la función con un cierto grado de aproximación. Sin embargo, a veces lo que se necesita es, fijado un entorno del punto a, conocer cuál es el grado del polinomio que debemos elegir para que dicho polinomio se parezca a la función en todo el intervalo, con un cierto grado de aproximación.

La función $\frac{f(x)-P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}$ es un infinitésimo en $x = a$, que llamaremos $\alpha(x)$ y que convendría estudiar para saber el grado de aproximación del polinomio a la función.

6.3. Fórmula de Taylor

De acuerdo con lo visto en la pregunta anterior

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + \alpha(x) \cdot (x-a)^n$$

Esta fórmula es conocida con el nombre de **Fórmula de Taylor** de grado n de la función f en el punto $x = a$ con resto en forma infinitésima, donde por resto queremos indicar $R_{n,f,a}(x) = \alpha(x) \cdot (x-a)^n$.

Puede demostrarse que este resto toma la forma $R_{n,f,a}(x) = \frac{1}{(1+n)!} f^{(n+1)}(c) \cdot (x-a)^n$ donde c es un punto comprendido entre x y a. Esta forma del resto se llama forma de Lagrange.

En el caso particular de que $a = 0$ la Fórmula de Taylor se conoce con el nombre de **Fórmula de McLaurin** y así, la Fórmula de McLaurin de grado n de una función f tendría la forma:

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Ej$_1$: Hallar la Fórmula de McLaurin de grado seis de la función $f(x) = e^x$.

$$\begin{array}{ll}
f(x) = e^x & f(0) = 1 \\
f^{'}(x) = e^x & f^{'}(0) = 1 \\
f^{''}(x) = e^x & f^{''}(0) = 1 \\
f^{'''}(x) = e^x & f^{'''}(0) = 1 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
f^{v''}(x) = e^x & f^{v''}(0) = 1
\end{array}$$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}e^c x^7$

$e^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^n + 1$

Ejercicio 6.1.- Hallar la Fórmula de McLaurin de grado n-ésimo de las siguientes funciones:

1. $f(x) = (1-x)^{-1}$
2. $f(x) = (1+x)^{-1}$

3. $f(x) = senx$
4. $f(x) = cosx$
5. $f(x) = log(1+x)$
6. $f(x) = (1+x)^a$

Ej2: ¿Cuál es el grado del polinomio de McLaurin que debe tomarse para que al sustituirlo por la función $f(x) = cosx$ cometa un error menor de $0,001$ en el intervalo $[-2,2]$?

El desarrollo de McLaurin de $cosx$ es

$$cosx = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} + \frac{cos(c+(n+1)\pi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

y el error que se comete al sustituir la función por el polinomio viene dado por el resto, es decir, $\dfrac{cos(c+(n+1)\pi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$.

En el intervalo $[-2,2]$ podemos acotar el resto de modo que si $x \in [-2,2]$ se tiene que

$$\left|\frac{cos(c+(n+1)\pi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| = \frac{|cos(c+(n+1)\pi)|}{|(2n+2)!|}|x|^{2n+2} \leq \frac{1}{(2n+2)!}2^{2n+2}$$

Si queremos que el error sea menor que $0,001$ bastará con elegir n de modo que se cumpla que $\frac{1}{(2n+2)!}2^{2n+2} < 0,001$.

Si lo calculamos resulta ser $n = 4$ y, consiguientemente, el polinomio

$$1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \tfrac{1}{8!}x^8$$

sustituye a la función $f(x) = cosx$ con un error menor que $0,001$ en el intervalo $[-2,2]$.

Ej3: Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2tanx} - e^x + x^2}{arcsenx - senx}$$

$f(x) = arcsenx$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1}$

$f''(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$

$arcsenx = x + \frac{x^3}{3!} + \alpha_1(x)x^3$

$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \alpha_2(x)x^3$

$f(x) = (1+2tanx)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+2tanx)^{-\frac{1}{2}}2sec^2x$

$f''(x) = -\frac{1}{2}(1+2tanx)^{-\frac{3}{2}}2sec^2xsec^2x + (1+2tanx)^{-\frac{1}{2}}2secx \cdot secx \cdot tanx = -(1+2tanx)^{-\frac{3}{2}}sec^4x + 2(1+2tanx)^{-\frac{1}{2}}sec^2xtanx$

$f'''(x) = \frac{3}{2}(1+2tanx)^{-\frac{5}{2}}2sec^2xsec^4x - (1+2tanx)^{-\frac{3}{2}}4sec^3x \cdot secx \cdot tanx - (1+2tanx)^{-\frac{3}{2}}2sec^2x \cdot sec^2x \cdot tanx + 2(1+2tanx)^{-\frac{1}{2}}(2secx \cdot secx \cdot tanx \cdot tanx + sec^4x)$

$\sqrt{1+2tanx} = 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^3}{3!} + \alpha_3(x)x^3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2tanx} - e^x + x^2}{arcsenx - senx} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^3}{6} + \alpha_3(x)x^3 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \alpha_4(x)x^3\right) + x^2}{x + \frac{x^3}{3!} + \alpha_1(x)x^3 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \alpha_2(x)x^3\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^3 + (\alpha_3(x) - \alpha_4(x))x^3}{\frac{1}{3}x^3 + (\alpha_1(x) - \alpha_2(x))x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}(\alpha_3(x) - \alpha_4(x))}{\frac{1}{3}(\alpha_1(x) - \alpha_2(x))} = 2$$

Ejercicio 6.2.- Calcula los siguientes límites:

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{arctanx} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2}}{log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - x + \frac{1}{6}x^3}{x - tanhx}$$

3. $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2tanx}{x + senx}\right)^{\frac{1}{1-cosx}}$$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{senx\cdot log(cosx)} - (1+4x)^{\frac{1}{4}} + x - \frac{3}{2}x^2}{x - senx^2}$$

Lección 7

Aplicación de la fórmula de Taylor al estudio de funciones.

7.1. Convexidad.

Definición: Diremos que un punto $x = a$ es de convexidad(concavidad) de la función f si existe un entorno del punto dentro del cual la tangente a la gráfica en dicho punto la deja en el semiplano superior (inferior)[1].

Si dentro del entorno la deja en distintos semiplanos a la derecha e izquierda del punto entonces se dice que éste es de inflexión.

Proposición: Si $f'' > 0 (< 0)$, entonces $x = a$ es un punto de concavidad (convexidad).

Demostración:

Supongamos que $f''(a) > 0$ y sea:

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \alpha(x)(x-a)^2$

La fórmula de Taylor de grado 2 de la función f en el punto igual a a.

Podemos poner:

$\bigstar\ f(x) - \underbrace{\big(f(a) + f'(a)(x-a)\big)}_{\text{recta tangente}} = \left(\dfrac{f''(a)}{2!} + \alpha(x)\right)(x-a)^2$

Como $\alpha(x)$ es un infinitésimo cuando $x \to a$ podemos considerar un entorno de este punto de modo que dentro de él $\alpha(x)$ sea suficientemente pequeño para que el signo de $\dfrac{f''(a)}{2!}$ no se vea alterado, es decir:

signo $\dfrac{f''(a)}{2!} =$ signo $\left(\dfrac{f''(a)}{2!} + \alpha(x)\right)$,es decir, > 0

Tomemos un punto x perteneciente al entorno y a la derecha del punto a. Sustituyendo en $\bigstar$ se tiene que:

$$y_{\text{curva}} - y_{\text{tangente}} = (+)(+) = (>0)(>0) > 0$$

Se sigue entonces que a la derecha del punto $x = a$ la curva se encuentra por encima de la tangente.

Si tomamos ahora un punto x dentro del entorno y a la izquierda del punto a, sustituyendo en $\bigstar$ tenemos de nuevo que:

$$y_{\text{curva}} - y_{\text{tangente}} = (+)(+) = (>0)(>0) > 0$$

También a la izquierda del punto $x = a$ la curva se encuentra por encima de la tangente.

[1] gráfico

La demostración ha finalizado puesto que hemos probado que dentro de un entorno la curva queda por encima de la tangente.

Razonando de forma análoga llegaríamos a probar que si $f'' < 0$ entonces $x = a$ es un punto de concavidad.

Corolario: Si $x = a$ es un punto de inflexión entonces $f''(a) = 0$.

Demostración:

Si $f''(a) > 0$ sería de convexidad.

Si $f''(a) < 0$ sería de concavidad.

Como no es ningún caso, se razona que $f''(a)$ debe ser 0.

De lo anterior se sigue que para calcular los puntos de inflexión de una función debemos resolver la ecuación $f''(x) = 0$. Ahora bien, no toda solución de la ecuación $f''(x) = 0$ es punto de inflexión (Si $f(x) = x^4$, $x = 0$ es solución de la ecuación
$f''(x) = 0$ y sin embargo no es un punto de inflexión). Necesariamente debemos establecer un criterio que permita distinguir de entre las soluciones de la ecuación aquellas que son puntos de inflexión. Tal criterio podría venir dado por el siguiente teorema:

Teorema: Si $f''(a) = 0, f''' \neq 0, x = a$ es un punto de inflexión.

Demostración:

Consideremos la fórmula de Taylor de orden 3 en el punto $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a^2) + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \alpha(x)(x-a)^3$$

Según las hipótesis del teorema:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \alpha(x)(x-a)^3$$

$$\bigstar\bigstar\ f(x) - \big(f(a) + f'(x-a)\big) = \left(\frac{f'''(a)}{3!} + \alpha(x)\right)(x-a)^3$$

Y suponiendo $f'''(a) > 0$ consideremos un entorno del punto $x = a$ dentro del cual:

$$\text{signo } \frac{f'''(a)}{3!} = \text{signo } \left(\frac{f'''(a)}{3!} + \alpha(x)\right), \text{ es decir, } > 0$$

[2]

Tomemos un punto x dentro del entrono de a y situado a su derecha. Sustituyendo en ★★ se tiene:

$$y_{\text{curva}} - y_{\text{tangente}} = (>0)(<0) = (<0)$$

Por consiguiente a la izquierda del punto $x = a$, la curva se encuentra por debajo de la tengente.

Los dos resultados anteriores permiten concluir que $x = a$ es un punto de inflexión.

$\longrightarrow$ Si $f''(a) = 0 = f'''(a), f''''(a) \neq 0$, razonando de forma similar al caso en el que $f''(a) \neq 0$, concluiríamos que $x = a$ es un punto de convexidad o concavidad.

$\longrightarrow$ Si $f''(a) = 0 = f'''(a) = f''''(a)$, y $f'''''(a) \neq 0$, razonando de forma similar al caso de $f'''(a) \neq 0$ resultaría que $x = a$ es un punto de inflexión.

Procediendo de forma análoga concluiríamos con la siguiente regla:

$$\text{Si } f''(a) = f'''(a) = f''''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{y}$$

$$f^{(n)}(a) \neq 0, \text{entonces}$$

[2] grafico

$$
\begin{array}{lll}
n & \rightarrow \text{par} & \rightarrow \text{convexidad } (f^{(n)}(a) > 0) \text{ o concavidad } (f^{(n)}(a) < 0) \\
n & \rightarrow \text{impar} & \rightarrow \text{punto de inflexión}
\end{array}
$$

7.2. Extremos relativos

Observemos que un mínimos relativo es un punto de convexidad y un máximo relativo es un punto de concavidad. Además la tangente en dichos puntos es horizontal.

Se sigue que para obtener los extremos relativos de una función resolveríamos en primer lugar la ecuación $f'(x) = 0$ y de entre las soluciones buscaríamos aquellas cuya segunda derivada $\neq 0$, es decir, $f''(x) = 0$, porque esto asegura la concavidad y así podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición: Si $f''(a) = 0$ y $f''(a) > 0(< 0)$ entonces $x = a$ es un mínimo (máximo) relativo.

Si $f'(a) = f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$, según la pregunta anterior se trata de un punto de inflexión con tangente horizontal.

Si $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0$ y $f''''(a) \neq 0$, según la pregunta anterior se trata de un punto de convexidad o cancavidad y por tanto de un extremo relativo.

Si procedemos análogamente reiterando el proceso obtenemos el siguiente resultado:

si $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$ entonces:

$$
\begin{array}{ll}
n & \text{par} \begin{cases} f^{(n)}(a) < 0 & \text{máximo relativo} \\ f^{(n)}(a) > 0 & \text{mínimo relativo} \end{cases} \\
n & \text{impar Punto de inflexión}
\end{array}
$$

Ejemplos:

- Hallar los lados del rectángulo de máximo perímetro inscrito en una semicircunferencia de radio r[3].

$$r^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} \rightarrow b = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$p = 2a + 2\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$p' = 2 + 2\frac{1}{\sqrt{r^2 \frac{a^2}{4}}}\left(\frac{-2a}{4}\right) = 0$$

$$2 - \frac{a}{2\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} = 0$$

$$4\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} - a = 0$$

$$5a^2 = 16R^2 \rightarrow a = \frac{4R}{\sqrt{5}}$$

Para comprobarlo:

[3]Dibujito

$$p'' = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}} - a\frac{1}{2\sqrt{r^2\frac{a^2}{4}}}\left(-\frac{2a}{4}\right)}{R^2-\frac{a^2}{4}} < 0 \rightarrow \text{Máximo}$$

- $f(x) = x^{101}, x = 0$ ¿Qué ocurre en x?

7.3. Representación de funciones

Para la representación de funciones seguiremos una serie de pasos, a destacar:

1 → Dominio. Regionamiento:

$$y\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots = \beta_1(x)\beta 1(x)\ldots \rightarrow y = 0;\ \varphi_i = 0;\ \beta_i = 0$$

2 → Cortes con los ejes:

Eje x: $y = 0$ Eje y:$x = 0$

3 → Simetría y periodicidad.

4 → Crecimiento y decrecimiento.

5 → Convexidad y puntos de inflexión

6 → Asíntotas: Horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty} y = K \leftarrow$ Asíntota

Verticales: $x = K;\ \lim_{x\to\pm K^{\pm}} = \pm\infty \leftarrow$ Asíntota

Oblicuas:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(y\text{curva} - y\text{Asíntota}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(0 - (ax - b)\right) = 0$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y-(ax-b)}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x} - a - \frac{b}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} - \lim_{x\to\pm\infty} a - \lim_{x\to\pm\infty}\frac{b}{x} = 0$$
$$\left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} - a - 0\right) = 0$$
$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y\text{curva}}{x}$$

Recordemos también las siguientes pautas:

$$\begin{cases} \text{Si } \exists \text{ Asíntota horizontal} \Rightarrow \nexists \text{ Asíntota Oblicua} \\ \text{Si } \exists \text{ Asíntota oblicua} \Rightarrow \nexists \text{ Asíntota horizontal} \end{cases}$$

Representar:[4]

[4]hacerlo????

- $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$
- $y = \dfrac{x^2-6x+8}{x^3-x}$
- $y = x\log x$
- $y = x\sqrt{1-x^2}$
- $y = x^x,\ x > 0$
- $y = \dfrac{e^x}{x}$
- $y = \operatorname{arc\,sen} x$

Lección 8

Primitiva de una Función.

8.1. Primitiva de una Función. Propiedades.

Diremos que $F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ si $F^{'}(x) = f(x)$.

Ej$_1$: x^3 es primitiva de $3x^2$

$senx$ es primitiva de $cosx$

$logx$ es primitiva de $\frac{1}{x}$

Si $F(x)$, $G(x)$ son, respectivamente, primitivas de $f(x)$, $g(x)$, entonces $F(x) + G(x)$ es primitiva de $f(x) + g(x)$.

También $t \cdot F(x)$ es primitiva de $t \cdot f(x)$ siendo $t \in \mathbb{R}$.

Tomemos $(F(x)+G(x))^{'} = F^{'}(x)+G^{'}(x) = f(x)+g(x)$; y también $(t\cdot F(x))^{'} = t\cdot F^{'}(x) = t \cdot f(x)$.

Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ y $G(x)$ también lo es, entonces $G(x) = F(x) + K(cte)$.

$(G(x) - F(x))^{'} = G^{'}(x) - F^{'}(x) = f(x) - f(x) = 0$. Se sigue que $G(x) - F(x) = K(cte)$, y por tanto $G(x) = F(x) + K(cte)$.

8.2. Integral de una Función

Al conjunto de primitivas de una misma función se le llama **integral** de esa función. En lo sucesivo lo representaremos por $\int f(x)dx$.

De acuerdo con la pregunta anterior, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces $\int f(x)dx = \{F(x) + K, \ \forall K \in \mathbb{R}\}$.

En la práctica la igualdad anterior se representa por $\int f(x)dx = F(x) + K$.

i) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Si $F(x)$, $G(x)$ son, respectivamente, primitivas de $f(x)$, $g(x)$, entonces:

$$\int f(x)dx = \{F(x) + K, \ K \in \mathbb{R}\}$$

$$\int g(x)dx = \{G(x) + C, \ C \in \mathbb{R}\}$$

Por otro lado $\int (f(x) + g(x))dx = (F(x) + G(x)) + D, \ D \in \mathbb{R}$.

Si convenimos sumar dos conjuntos A, B de la forma $A + B = \{a + b, \ a \in A, \ b \in B\}$ entonces:

$\displaystyle\int f(x)dx + \int g(x)dx = \{F(x) + K, \ K \in \mathbb{R}\} + \{G(x) + C, \ C \in \mathbb{R}\} = \{F(x) + K + G(x) + C, \ K, C \in \mathbb{R}\} = \{F(x) + G(x) + D, \ D \in \mathbb{R}\} = \int (f(x) + g(x))dx$

ii) Si $t \in \mathbb{R}$ entonces $\int (t \cdot f(x))dx = t \cdot \int f(x)dx$.
Si convenimos en que $t \cdot A = \{t \cdot a,\ a \in A\}$ entonces:
$t \cdot \displaystyle\int f(x)dx = t \cdot \{F(x) + K,\ K \in \mathbb{R}\} = \{t \cdot F(x) + t \cdot K,\ K \in \mathbb{R}\} = \{t \cdot F(x) + C,$
$C \in \mathbb{R}\} = \displaystyle\int (t \cdot f(x))dx$

8.3. Diferencial de una Función

Si $u = u(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamaremos **diferencial** de esta función a la expresión: $du = u'dx$.
A partir de esta definición, si $u = u(x)$, $v = v(x)$ son dos funciones, entonces:
i) $d(u + v) = (u + v)^{'} dx = (u' + v')dx = u'dx + v'dx = du + dv$
ii) $d(u \cdot v)dx = (u \cdot v)^{'} dx = (u'v + uv')dx = u'vdx + uv'dx = vdu + udv$

Si $\int f(x)dx = F(x) + K$ y $u = u(x)$, entonces $\int f(u)du = F(u) + K$
$\int f(u)du = \int f(u)u'dx$
Veamos que $F(u)$ es una primitiva de $f(u)u'$. En efecto $(F(u))^{'} = F^{'}(u)u' = f(u)u'$ porque si $\dfrac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$ entonces $\dfrac{d}{dx}(F(u)) = f(u)$
Ej1: $\displaystyle\int sen^2 xd(senx) = \frac{1}{3}sen^3 x + K$ porque $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + K$ y aplicamos la proposición anterior.
Ej2: $\displaystyle\int e^x d(e^x) = \frac{e^{2x}}{2}sen^3 x + K$ porque $\displaystyle\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + K$ y aplicamos la proposición anterior.
Ej3: $\displaystyle\int 2x\sqrt{1 + x^2}d(x) = \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + K$ porque $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + K$ y aplicamos la proposición anterior.

8.4. Cálculo de Primitivas

Abordamos en esta pregunta el cálculo de primitivas. Este cálculo resulta ser más complicado que el cálculo de derivadas, por cuanto que existen reglas que permiten obtener la derivada de cualquier función; pero no existen reglas análogas para obtener una primitiva de cualquier función. Incluso es posible que ni siquiera exista la primitiva de una función, dada de forma explícita como hasta ahora conocemos las funciones. En lo que sigue estableceremos grupos de funciones de modo que si una función pertenece a uno de estos grupos, sepamos calcular una de sus primitivas. Esto, sin embargo, no garantiza que dada una función podamos obtener una de sus primitivas, ya que es posible que no pertenezca a alguno de estos grupos.

8.4.1. Grupo 1

$\displaystyle\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + K,\ a \neq -1$
$\displaystyle\int x^{-1} dx = logx + K$

Ejercicio 8.1.- Calcula las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2\sqrt{x} + x}{x^2} dx$

2. $\displaystyle\int(\sqrt{x}+1)^3dx$

3. $\displaystyle\int(x+1)^{10}dx$

4. $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}dx$

5. $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2+5)^{10}}dx$

6. $\displaystyle\int\frac{logx}{x}dx$

7. $\displaystyle\int\frac{cosx}{sen^3x}dx$

8. $\displaystyle\int tanxdx$

8.4.2. Grupo 2

$\int e^xdx = e^x + K$
$\int e^udu = e^u + K$

Ej1: $\displaystyle\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + K$

$$\int(e^x+e^{-x})^2dx = \int(e^{2x}+e^{-2x}+2)dx = \int e^{2x}+\int e^{-2x}+2\int dx = \frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+K$$

8.4.3. Grupo 3

$\int senxdx = -cosx + K$	$\int cosxdx = senx + K$
$\int senudu = -cosu + K$	$\int cosudu = senu + K$

Ej1: $\displaystyle\int sen2xdx = \frac{1}{2}\int sen2xd(2x) = -\frac{1}{2}cos2x + K$

$$\int xcosx^2dx = \frac{1}{2}\int 2xcosx^2dx = \frac{1}{2}\int cosx^2d(x^2) = \frac{1}{2}senx^2 + K$$

8.4.4. Grupo 4

$$\int\frac{1}{cosx}dx = \int secxdx = \int\frac{secx(secx+tanx)}{secx+tanx}dx = \int\frac{sec^2x+secx\cdot tanx}{secx+tanx}dx = \int\frac{d(secx+tanx)}{secx+tanx} = log(secx+tanx)+K$$

$\int secxdx = log(secx + tanx) + K$
$\int secudu = log(secu + tanu) + K$

$$\int\frac{1}{senx}dx = \int cosecxdx = \int\frac{cosecx(cosecx+cotanx)}{cosecx+cotanx}dx = \int\frac{cosec^2x+cosecx\cdot cotanx}{cosecx+cotanx}dx = \int\frac{d(cosecx+cotanx)}{cosecx+cotanx} = log(cosecx+cotanx)+K$$

$\int cosecxdx = log(cosecx + cotanx) + K$
$\int cosecudu = log(cosecu + cotanu) + K$

8.4.5. Grupo 5

$$\boxed{\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx}$$

Existen dos posibilidades.

i) $ax^2 + bx + c$ posee raíces reales a_1, a_2.
En este caso es sabido que:
$ax^2 + bx + c = a(x - a_1)(x - a_2)$
Y también que:
$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2}$
Por lo que se tiene que:
$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{A}{x-a_1}dx + \int \frac{B}{x-a_2}dx = Alog(x-a_1) + Blog(x-a_2) + K$
Ej$_1$: $\int \frac{3x-5}{6x^2-5x+1}$
$\frac{3x-5}{6x^2-5x+1} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-\frac{1}{3}} = \frac{x(A+B)-\frac{1}{3}A-\frac{1}{2}B}{x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}} = \frac{x(6A+6B)-(2A+3B)}{6x^2-5x+1}$
$\left.\begin{array}{r} 6A+6B=3 \\ 2A+3B=5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2A-2B=-1 \\ 2A+3B=5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} B=4 \\ A=-\frac{7}{2} \end{array}$
$\int \frac{3x-5}{6x^2-5x+1} = \int \frac{-\frac{7}{2}}{x-\frac{1}{2}}dx + \int \frac{4}{x-\frac{1}{3}}dx = -\frac{7}{2}log(x-\frac{1}{2}) + 4log(x-\frac{1}{3}) + K$

ii) $ax^2 + bx + c$ no posee raíces reales.
Resolvemos esta integral mediante varios pasos.

Paso 1.
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctanx + K$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{1}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}arctan\left(\frac{x}{a}\right) + K$

Paso 2.
$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$
$ax^2 + bx + c = (d_1x \pm d_2x)^2 + d_3^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}\right)^2$

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{d\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}} \cdot arctan\left(\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\right) + K$$

Ej2: $\displaystyle\int \frac{1}{5x^2+3x+1}dx = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{5}x+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + (-\frac{9}{20}+1)} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{5}x+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}\right)^2} =$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(\sqrt{5}x+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)}{\left(\sqrt{5}x+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}}\cdot arctan\left(\frac{\sqrt{5}x+\frac{3}{2\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}}\right)+K = \frac{2}{\sqrt{11}}\cdot arctan\left(\frac{10x+3}{\sqrt{11}}\right)+K$$

Paso 3.

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = m\int \frac{x+\frac{n}{m}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2an}{m}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{m}{2a}\int \frac{(2ax+b)+\left(\frac{2an}{m}-b\right)}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$\frac{m}{2a}\int\left(\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}+\frac{\frac{2an}{m}-b}{ax^2+bx+c}\right)dx = \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \frac{m}{2a}\left(\frac{2an}{m}-b\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$\frac{m}{2a}log(ax^2+bx+c)+\left(n-\frac{bm}{2a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\cdot arctan\left(\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\right)+K$$

Ej3: $\displaystyle\int \frac{2x-3}{5x^2+3x+1}dx = 2\int \frac{x-\frac{3}{2}}{5x^2+3x+1}dx = \frac{2}{10}\int \frac{10x-\frac{30}{2}}{5x^2+3x+1}dx = \frac{1}{5}\int \frac{10x+3-18}{5x^2+3x+1}dx =$

$$\frac{1}{5}\int \frac{10x+3}{5x^2+3x+1}dx - \frac{18}{5}\int \frac{dx}{5x^2+3x+1} = \frac{1}{5}log(5x^2+3x+1) - \frac{36}{5\sqrt{11}}\cdot arctan\frac{10x+3}{\sqrt{11}}+K$$

8.4.6. Grupo 6. Integración de Fracciones Racionales.

$$\boxed{\int \frac{p(x)}{q(x)}dx} \text{ con } grado\ p(x) > grado\ q(x)$$

En primer lugar descomponemos $\frac{p(x)}{q(x)}$ como suma de fracciones simples:

Para ello descomponemos el polinomio $q(x)$ en producto de factores primos. Tal descomposición tendrá la forma

$q(x) = a(x-r_1)^{\alpha_1}(x-r_2)^{\alpha_2}\cdots(x-r_n)^{\alpha_n}(x^2+s_1x+t_1)^{\beta_1}(x^2+s_2x+t_2)^{\beta_2}\cdots(x^2+s_nx+t_n)^{\beta_n}$

donde r_i es una raíz real de $q(x)$ con índice de multiplicidad α_i, y cada $(x^2+s_ix+t_i)$ es un trinomio indescomponible con índice de multiplicidad β_i.

Entonces se tiene que

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{p(x)}{a(x-r_1)^{\alpha_1}(x-r_2)^{\alpha_2}\cdots(x-r_n)^{\alpha_n}(x^2+s_1x+t_1)^{\beta_1}(x^2+s_2x+t_2)^{\beta_2}\cdots(x^2+s_nx+t_n)^{\beta_n}}dx$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{p(x)}{(x-r_1)^{\alpha_1}(x-r_2)^{\alpha_2}\cdots(x-r_n)^{\alpha_n}(x^2+s_1x+t_1)^{\beta_1}(x^2+s_2x+t_2)^{\beta_2}\cdots(x^2+s_nx+t_n)^{\beta_n}}dx$$

Se sigue que nos dedicaremos a calcular esta última integral, y para ello descompondremos el integrando como suma de fracciones simples, en lugar de $\frac{p(x)}{q(x)}$ como habíamos dicho al principio.

Puede probarse que tal descomposición es de la forma:

$$\frac{p(x)}{(x-r_1)^{\alpha_1}(x-r_2)^{\alpha_2}\cdots(x-r_n)^{\alpha_n}(x^2+s_1x+t_1)^{\beta_1}(x^2+s_2x+t_2)^{\beta_2}\cdots(x^2+s_nx+t_n)^{\beta_n}} =$$

$$\frac{A_1^1}{x-r_1}+\frac{A_1^2}{(x-r_1)^2}+\cdots+\frac{A_1^{\alpha_1}}{(x-r_1)^{\alpha_1}}+\cdots+\frac{A_n^1}{x-r_n}+\frac{A_n^2}{(x-r_n)^2}+\cdots+\frac{A_n^{\alpha_n}}{(x-r_n)^{\alpha_n}}+\frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+s_1x+t_1}+$$

$$\frac{B_1^2x+C_1^2}{(x^2+s_1x+t_1)^2}+\cdots+\frac{B_1^{\beta_n}x+C_1^{\beta_n}}{(x^2+s_1x+t_1)^{\beta_n}}+\cdots+\frac{B_m^1x+C_m^1}{x^2+s_mx+t_m}+\frac{B_m^2x+C_m^2}{(x^2+s_mx+t_m)^2}+\cdots+$$

$$\frac{B_m^{\beta_m}x+C_m^{\beta_m}}{(x^2+s_mx+t_m)^{\beta_m}}$$

Siendo A_i^j, B_i^j, C_i^j, números reales a determinar.

Hecha la descomposición, entonces:

$$\int \frac{p(x)}{(x-r_1)^{\alpha_1}(x-r_2)^{\alpha_2}\cdots(x-r_n)^{\alpha_n}(x^2+s_1x+t_1)^{\beta_1}(x^2+s_2x+t_2)^{\beta_2}\cdots(x^2+s_nx+t_n)^{\beta_n}}dx =$$

$$\int \frac{A_1^1}{x-r_1}dx+\int \frac{A_1^2}{(x-r_1)^2}dx+\cdots+\int \frac{A_1^{\alpha_1}}{(x-r_1)^{\alpha_1}}dx+\cdots+\int \frac{A_n^1}{x-r_n}dx+\int \frac{A_n^2}{(x-r_n)^2}dx+\cdots+$$
$$\int \frac{A_n^{\alpha_n}}{(x-r_n)^{\alpha_n}}dx+\int \frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+s_1x+t_1}dx+\int \frac{B_1^2x+C_1^2}{(x^2+s_1x+t_1)^2}dx+\cdots+\int \frac{B_1^{\beta_n}x+C_1^{\beta_n}}{(x^2+s_1x+t_1)^{\beta_n}}dx+$$
$$\cdots+\int \frac{B_m^1x+C_m^1}{x^2+s_mx+t_m}dx+\int \frac{B_m^2x+C_m^2}{(x^2+s_mx+t_m)^2}dx+\cdots+\int \frac{B_m^{\beta_m}x+C_m^{\beta_m}}{(x^2+s_mx+t_m)^{\beta_m}}dx$$

Donde las integrales del segundo miembro de la igualdad son todas conocidas salvo aquellas donde aparece un trinomio elevado a un exponente mayor que uno.

8.4.7. Grupo 7. Funciones Trigonométricas.

i) $\boxed{\int sen^px\cdot cos^qxdx}$ con p ó q impar.

Supongamos que q es impar.

$$\int sen^px\cdot cos^{q-1}xcosxdx=\int sen^px\cdot(cos^2x)^{\frac{q-1}{2}}cosxdx=\int sen^px\cdot(1-sen^2x)^{\frac{q-1}{2}}d(senx)$$

Ej$_1$: $\int sen^2xcos^3xdx=\int sen^2xcos^2xcosxdx=\int sen^2x(1-sen^2x)d(senx)=\int(sen^2x-sen^4x)d(senx)=\frac{sen^3x}{3}-\frac{sen^5x}{5}+K$

ii) $\boxed{\int sen^px\cdot cos^qxdx}$ con p y q pares.

Esta integral se resuelve pasando a ángulos múltiples.

$cos2x=cos^2x-sen^2x=2cos^2x-1=1-2sen^2x$

$cos^2x=\dfrac{1+cos2x}{2}$

$sen^2x=\dfrac{1-cos2x}{2}$

Se sustituye en el integrando y se resuelve.

Ej$_2$: $\int sen^4xdx=\int\frac{(1-cos2x)^2}{4}dx=\frac{1}{4}\int(1+cos^22x-2cos^2x)dx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\int cos2xdx+\frac{1}{4}\int cos^22xdx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}sen2x+\frac{1}{4}\int\frac{1+cos4x}{2}dx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}sen2x+\frac{1}{8}\int(1+cos4x)dx=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}sen2x+\frac{1}{32}sen4x+K$

iii) $\boxed{\int\frac{sen^px}{cos^qx}dx}$ con p impar.

Es similar al caso i)

$$\int\frac{sen^px}{cos^qx}dx=\int\frac{sen^{p-1}xsenx}{cos^qx}dx=-\int\frac{(sen^2x)^{\frac{p-1}{2}}}{cos^qx}d(cosx)=-\int\frac{(1-cos^2x)^{\frac{p-1}{2}}}{cos^qx}d(cosx)=\ \ldots$$

$\boxed{\int\frac{sen^px}{cos^qx}dx}$ con q impar.

$$\int\frac{sen^px}{cos^qx}dx=\int\frac{(1-cos^2x)^{\frac{p}{2}}}{cos^qx}dx=\int\left(\begin{array}{c}\text{potencias impares de}\\ \text{cosenos y de secantes}\end{array}\right)dx$$

Las potencias impares de cosenos pueden resolverse de acuerdo con el apartado primero, y las potencias impares de secantes las resolveremos utilizando un método llamado Integración por partes.

iv) $\boxed{\int\frac{sen^px}{cos^qx}dx}$ con p y q pares.

$$\int\frac{sen^px}{cos^qx}dx=\int\frac{(1-cos^2x)^{\frac{p}{2}}}{cos^qx}dx=\int\left(\begin{array}{c}\text{potencias pares de}\\ \text{cosenos y de secantes}\end{array}\right)dx$$

Las integrales con potencias pares de cosenos han sido ya estudiadas y las de potencias pares de secantes veremos a continuación cómo se obtienen.

$\boxed{\int sec^p x dx}$ con p par.

$$\int sec^p x dx = \int sec^{p-2} x sec^2 x dx = \int (sec^2 x)^{\frac{p-2}{2}} sec^2 x dx = \int (1 + tan^2 x)^{\frac{p-2}{2}} d(tanx)$$

Ej3: $\int \frac{sen^6 x}{cos^4 x} dx = \int \frac{(1 - cos^3 x)^2}{cos^4 x} dx = \int \frac{1 - 3cos^2 x + 3cos^4 x - cos^6 x}{cos^4 x} dx = \int sec^4 x dx - 3\int sec^2 x dx + 3\int dx - \int cos^2 x dx = \int sec^2 x sec^2 x dx - 3\int d(tanx) + 3x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen2x = \int (1 + tan^2 x) d(tanx) - 3tanx + \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}sen2x = tanx + \frac{1}{3}tan^3 x - 3tanx + \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}sen2x = \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{3}tan^3 x - 2tanx$

8.4.8. Grupo 8. Integración por Partes.

Este método está basado en la fórmula:

$d(uv) = vdu + udv$

$udv = d(uv) - vdu$ $\qquad$ $\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$

$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$

Para resolver una integral por partes, dividiremos el integrando en dos partes que igualaremos a u y a dv, siguiendo dos principios:

i) Puesto que aparecen uv, debemos saber obtenerlos.

ii) Puesto que debe integrarse $\int vdu$, conviene que esta integral sea más fácil que $\int udv$.

Si en algún momento esta integral se complica lo mejor es borrar y empezar de nuevo con elección de u, dv de forma distinta.

Ej1: $\int xcosxdx$

$$\left.\begin{array}{r} u = x \\ dv = cosxdx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = senx \end{array} \quad \int xcosxdx = xsenx - \int senxdx = xsenx + cosx + K$$

Ej2: $\int x^2 logxdx$

$$\left.\begin{array}{r} u = logx \\ dv = x^2dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{array} \quad \int x^2 logxdx = \frac{x^3}{3}logx - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}logx - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}logx - \frac{x^3}{9} + K$$

Ej3: $\int x^2 e^x dx$

$$\left.\begin{array}{r} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2xdx \\ v = e^x \end{array} \quad \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2xdx$$

De nuevo aplicamos el método a la última integral.

$$\left.\begin{array}{r} u = x \\ dv = e^x dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = e^x \end{array} \quad \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + K$$

Ej4: $\int e^x cosxdx$

$$\left.\begin{array}{r} u = e^x \\ dv = cosxdx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = senx \end{array} \quad \int e^x cosxdx = e^x senx - \int senxe^x dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = e^x \\ dv = senxdx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = -cosx \end{array} \quad \int e^x cosxdx = e^x senx - \left(-e^x cosx - \int -cosxe^x dx\right) = e^x senx +$$

$e^x cosx - \int e^x cosxdx$

$$2\int e^x cosxdx = e^x senx + e^x cosx$$
$$\int e^x cosxdx = \frac{1}{2}(e^x senx + e^x cosx) + K$$

Ej$_5$: $\displaystyle\int sec^3 xdx = \int secxsec^2 xdx$

$\begin{array}{c|l} u = secx & du = secxtanxdx \\ dv = sec^2 xdx & v = tanx \end{array}$ $\displaystyle\int sec^3 xdx = secxtanx - \int tanxsecxtanxdx = secxtanx -$

$\displaystyle\int secxtan^2 xdx = secxtanx - \int secx(sec^2 x - 1)dx = secxtanx + \int secxdx - \int sec^3 xdx$

$$2\int sec^3 xdx = secxtanx + log(secx + tanx)$$
$$\int sec^3 xdx = \frac{1}{2}(secxtanx + log(secx + tanx)) + K$$

Ej$_6$: $\displaystyle\int sec^5 xdx = \int sec^3 xsec^2 xdx$

$\begin{array}{c|l} u = sec^3 x & du = 3sec^2 xsecxtanxdx \\ dv = sec^2 xdx & v = tanx \end{array}$ $\displaystyle\int sec^5 xdx = sec^3 xtanx - \int tanx3sec^3 xtanxdx =$

$\displaystyle sec^3 xtanx - 3\int sec^3 xtan^2 xdx = sec^3 xtanx - 3\int sec^3 x(sec^2 x - 1)dx = sec^3 xtanx + 3\int sec^3 xdx -$
$\displaystyle 3\int sec^5 xdx$

$$4\int sec^5 xdx = sec^3 xtanx + 3\int sec^3 xdx$$

Puesto que $\int sec^3 xdx$ sabemos calcularla, obtenemos:

$$\int sec^5 xdx = \frac{1}{4}sec^3 xtanx + \frac{3}{4}\int sec^3 xdx + K$$

De forma análoga se calcularían $\int sec^7 xdx$, $\int sec^9 xdx$, ...

8.4.9. Grupo 9. Integración por Cambio de Variable.

Supongamos que se quisiera, y no se sabe, calcular $\int f(x)dx$. Y supongamos que es posible expresar x como función de otra variable $x = U(t)$ de modo que tenga inversa y que $\int f(U(t)) \cdot U'(t)dt$ sí que se sabe calcular. Si $F(t)$ es el resultado entonces $\int f(x)dx = F(U^{-1}(x)) + K$.

En efecto $\frac{d}{dx}(F(U^{-1}(x))) = F' \cdot (U^{-1})'$

Como $F' = f(U(t)) \cdot U'(t)$ entonces:

$$\frac{d}{dx}(F(U^{-1}(x))) = f(x)U'(U^{-1}(x))' = f(x)(U \circ U^{-1}(x))' = f(x)(x)' = f(x)$$

Ej$_1$: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ Cambio $x = t^2$

$$\int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{t}{1+t}dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2t - 2log(1+t) + K$$
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 2log(1+\sqrt{x}) + K$$

Ej$_2$: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ Cambio $x = t^6$ porque $6 = mcm(2,3)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int \left(t^2 - t + 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t + log(t+1)\right) +$$
$$K = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6log(1+\sqrt[6]{x}) + K$$

Ej$_3$: $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$ Cambio $x = 2 + t^2$

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx = \int \frac{(t^2+3)2tdt}{(2+t^2)t} = 2\int \frac{t^2+3}{t^2+2}dt = 2\int \left(1+\frac{1}{t^2+2}\right)dt = 2t+2\int \frac{1}{t^2+2}dt =$$
$$2t+2\int \frac{1}{t^2+(\sqrt{2})^2}dt = 2t+\frac{2}{\sqrt{2}}arctan\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)+K = 2\left(\sqrt{x-2}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctan\left(\sqrt{\frac{x-2}{2}}\right)\right)+K$$

$$\boxed{\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsenx + K$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2(1-(\frac{x}{a})^2)}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{ad(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = arcsen\left(\frac{x}{a}\right)+K$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{Cambio } x = tant$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{sec^2tdt}{sect} = log(sect+tant) = log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+K$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2(1+(\frac{x}{a})^2)}} = \frac{1}{a}\int \frac{ad(\frac{x}{a})}{\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2}} = log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) = log\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right) =$$
$$log\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right) = log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) - loga = log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+K$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{Cambio } x = sect$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{sect\cdot tantdt}{tant} = log(sect+tant) = log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+K$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2((\frac{x}{a})^2-1)}} = \frac{1}{a}\int \frac{ad(\frac{x}{a})}{\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}} = log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right) = log\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) =$$
$$log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) = log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) - loga = log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+K$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsen\left(\frac{x}{a}\right)+K}$$
$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+K}$$
$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+K}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}} \qquad ax^2+bx+c \begin{array}{l} \nearrow (c_1x\pm c_2)^2+c_3^2 \\ \rightarrow (c_1x\pm c_2)^2-c_3^2 \\ \searrow c_3^2-(c_1x\pm c_2)^2 \end{array}$$

Ej4: $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{2}x-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2-\frac{9}{8}+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{2}x-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{23}{8}}\right)^2}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{2}x-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}x-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{23}{8}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}log\left(\sqrt{2}x-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\sqrt{2x^2-3x+4}\right)+K$$

Ej5: $$\int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2+5x-1}}dx = 4\int \frac{x-\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+5x-1}}dx = 2\int \frac{2x-\frac{3}{2}}{\sqrt{x^2+5x-1}}dx = 2\int \frac{2x+5-5-\frac{3}{2}}{\sqrt{x^2+5x-1}}dx =$$
$$2\left(\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-1}}dx - \frac{13}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x-1}}\right) = 2\int \frac{d(x^2+5x-1)}{\sqrt{x^2+5x-1}} - 13\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-1}} =$$

$$2\int(x^2+5x-1)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+5x-1)-13\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{29}{4}}\right)^2}}=4\sqrt{x^2+5x-1}-13\int\frac{d\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{29}{4}}\right)^2}}=$$
$$4\sqrt{x^2+5x-1}-13log\left(x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x-1}\right)+K$$

Ejercicio 8.2.- Calcula las siguientes integrales:

1. $\int x3^x dx$
2. $\int xtan^2xdx$
3. $\int log^2xdx$
4. $\int xarctan^2xdx$
5. $\int \frac{arcsenx}{\sqrt{1+x}}dx$
6. $\int \frac{logx}{x^2}dx$
7. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$
8. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$
9. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$

Lección 9

La integral definida

9.1. Particiones de un intervalo

Llamaremos partición del intervalo $[a, b]$ a un conjunto de puntos en él contenido[1]:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots x_n = b$$

Al conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$ lo representaremos por $\pi[a, b]$.

Diremos que una partición π_2 es <u>más fina</u> que otra π_1 si $\pi_1 \subset \pi_2$, es decir, π_2 contiene todos los puntos de π_1. Lo indicaremos por $\pi_1 < \pi_2$.

Por $\pi_1 \cup \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2$, entenderemos la partición unión e intersección respectivamente de las particiones π_1, π_2.

9.2. Suma inferior, suma superior. Propiedades

En lo sucesivo, consideremos funciones acotadas en el intervalo $[a, b]$. Dada una de ellas f, llamaremos:

- Suma inferior de la función f correspondiente a una partición π del intervalo $[a, b]$:

  $$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

  al número real:

  $$s(f, \pi) = m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + \ldots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

  donde m_i es el ínfimo de todos lo valores:

  $$m_i = \inf\{f(x), x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0 \ldots n - 1\}$$

- Suma superior de la función f, correspondiente a una partición π del intervalo $[a, b]$.

  $$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

  al número real:

  $$S(f, \pi) = M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \ldots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

[1] Gráfico

donde:

$$M_i = \sup\{f(x), x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0 \dots n-1\}$$

Propiedades:

i) Si $\pi[a,b]$ entonces:

$$s(f,\pi) \leq S(f,\pi)$$

porque $m_i \leq M_i,\ i = 0 \dots n-1$.

ii) Si $\pi_1 < \pi_2$ entonces:

$$s(f,\pi_1) < s(f,\pi_2)$$
$$S(f,\pi_1) < S(f-\pi_2)$$

iii) Si $\pi_1, \pi_2 \in \pi[a,b]$ entonces:

$$s(f,\pi_1) \leq S(f,\pi_2)$$

Demostración:

En efecto:

$$S(f,\pi_1) \leq s(f,\pi_1 \cup \pi_2) \leq S(f,\pi_1 \cup \pi_2) \leq S(f,\pi_2)$$

9.3. Integral inferior. Integral superior. Intergral de Riemann

La propiedad tres del párrafo anterior nos permite decir que el conjunto de las sumas inferiores (superiores) está acotado superiormente (inferiormente) siendo cualquier suma superior (inferior) una cota superior(inferior). Teniendo en cuenta las propiedades de los números reales podemos afirmar que:

i) El conjunto de las sumas inferiores posee supremo. A este supremo le llamaremos integral inferior de la función f en el intervalo $[a,b]$ y lo representaremos por $\underline{\int_a^b} f$.Le llamaremos integral inferior de Riemann de la función f en el intervalo cerrado $[a,b]$.

ii) El conjunto de las sumas superiores posee ínfimo. A este ínfimo le llamaremos integral superior de Riemann de la función f en el intervalo cerrado $[a,b]$ y lo indicaremos por $\overline{\int_a^b} f$.

Ciertamente: $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$ y en el caso en el que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ se dice que la función f es integral de Riemann en el intervalo cerrado $[a,b]$.

Al valor lo representamos por $\int_a^b f$.

Cabe preguntarse qué funciones son integral de Riemann y cuáles no. En este sentido puede probarse que cualquier función continua en el intervalo $[a,b]$ es integral de Riemann en ese intervalo. También puede probarse que cualquier función con un número finito de discontinuidades de primera especie, es integral de Riemann en el intervalo $[a,b]$.

La función definida por:

$$f(x)\begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

en el intervalo $[a,b]$ no es integral de Riemann puesto que si π es una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$ entonces $s(f,\pi)=0$, ya que todos los $m_i = 0$.

Por otro lado $S(f,\pi) = 1(x_1 - x_0) + 1(x_2 - x_1) + \ldots + 1(x_n - x_{n-1}) = b - a$

El teoremos que a continuación exponemos, es una caracterización de las funciones integral de Riemann y es un teorema importante porque a partir de él pueden probarse importantes propiedades de la integral.

Teorema: La función f es integrable Riemann en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $\forall\, \epsilon > 0$ es posible encontrar una partición $\pi \in \pi[a,b]$ de modo que $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \epsilon$.

Demostración:

si) Supongamos que f no fuera integral de Riemann, entonces $\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$.

Supongamos que $\epsilon = \dfrac{1}{2}\left(\underline{\int_a^b} f - \overline{\int_a^b} f\right)$ y sea π una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$. Puesto que:

$$s(f,\pi) \leq \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f \leq S(f,\pi)$$

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) \geq \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f = 2\epsilon > \epsilon$$

Entonces para el ϵ establecido no es posible encontrar una partición de modo que $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \epsilon$. Esto es una contradicción con las hipótesis del enunciado que viene de suponer que f no es integral de Riemann.

solo si) Consideremos $\epsilon > 0$ como $\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,\pi), \pi \in \pi[a,b]\}$ entonces existe una partición π_1 de modo que $\underline{\int_a^b} f - s(f,\pi_1) < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Como $\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,\pi), \pi \in \pi[a,b]\}$ entonces existe una partición π_2 de modo que $S(f,\pi_2) - \overline{\int_a^b} f < \dfrac{\epsilon}{2}$

Consideremos $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, entonces:

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) < S(f,\pi_2) - s(f,\pi_2)$$

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) < \epsilon$$

Pero gracias a que partimos de:

$$\begin{aligned} S(f,\pi_2) - s(f,\pi_1) &= S(f,\pi_2) - \int_a^b f + \int_a^b f - s(f,\pi_1) = \\ &= S(f,\pi_2) - \overline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} f - s(f,\pi_1) = \\ &= S(f,\pi_2) - \overline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} f - s(f,\pi_1) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Consideremos la función constante $f(x) = 2$ en el intervalo $[1,3]$. Si π es una partición cualquiera de este intervalo entonces hallamos $s(f,\pi)$ y $\underline{\int_a^b} f = 4$. Por otro lado $S(f,\pi)$ y $\overline{\int_a^b} f$ también la hallamos. Por tanto $f(x) = 2$ es integral de Riemann en el intervalo $[1,3]$ y su integral $\int_1^3 2 = 4$.

$$s(f,\pi) = 2(x_0 - x_1) + 2(x_2 - x_1) + \ldots + 2(x_n - x_{n-1}) = 4$$
$$S(f,\pi) = 2(x_0 - x_1) + 2(x_2 - x_1) + \ldots + 2(x_n - x_{n-1}) = 4$$
$$\underline{\int_1^3} f = \overline{\int_1^3} f = \int_1^3 = 4$$

Análogamente se podría haber probado que si $f(x) = K$ (cte), en el intervalo $[a,b]$, entonces f es integral de Riemann en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $\int_a^b = K(b-a)$.

Sin embargo si consideramos la función $f(x) = 2x$ no resulta tan fácil obtener la suma inferior y la superior para una partición cualquiera y mucho menos la integral inferior y la superior. Esta situación se complica mucho más si en lugar de ser $2x$ es una función más compleja y por consiguiente se hace necesario un criterio que permita extender con relativa facilidad la integral de cualquier función en un intervalo.

Lo que sigue son los pasos que conducen entre otras cosas a tal criterio.

9.4. Propiedades de la integral.

i) (lineabilidad) Si f y g son integrales de Riemann en $[a,b]$ entonces $f+g$ también lo es y además $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$.

ii) (lineabilidad) Si f es integral de Riemann en $[a,b]$ y $f \in \mathbb{R}$ entonces $t\,f$ es integral de Riemann en $[a,b]$ y además $\int_a^b tf = t\int_a^b f$.

iii) Si $c \in [a,b]$ entonces f es integral de Riemann en a,b si y solo si lo es $[a,c]$ y $[c,b]$ además $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.[2]

9.5. Teorema del valor medio del cáculo integral

Si[3] f es continua (Riemann) en $[a,b]$ entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

Demostración:

Por el teorema de Weiertrass existen $c_1, c_2 \in [a,b]$ de modo que $f(c_1) = \text{mín}\{f(x),$ $x \in [a,b]\}$ y $f(c_2) = \text{máx}\{f(x), x \in [a,b]\}$ por consiguiente:

$$f(c_1) \le f \le f(c_2) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

y por tanto:

$$\int_a^b f(c_1) \le \int_a^b f \le \int_a^b f(c_2)$$
$$f(c_1)(b-a) \le \int_a^b f \le f(c_2)(b-a)$$
$$f(c_1) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le f(c_2)$$

[2]Dibujo

[3]Otro dibujo

Por el teorema de los valores intermedios existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

se sigue que:

$$\int_a^b f = f(c)(b-a)$$

9.6. Función integral. Teorema fundamental del cálculo.

Supongamos[4] que f es integral de Riemann en el intervalo $[a,b]$ entonces para cualquier x que pertenezca al intervalo $[a,b]$ existe la integral $\int_a^x f$.Podemos definir una función:

$$\begin{aligned} F : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f \end{aligned}$$

Asociando a cada x perteneciente al intervalo $[a,b]$ el número $\int_a^x$. A esta función le llamaremos función integral de f en el intervalo $[a,b]$.

Teorema fundamental del cálculo.

Si f es continua en $[a,b]$ entonces su función integral F es derivable en $[a,b]$ y además $F'(x) = f(x)$.

Demostración:[5]

Consideremos $x_0 \in [a,b]$ y supongamos $x > x_0$:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f}{x-x_0}$$

Por el teorema del valor medio:

$$\frac{f(c)(x-x_0)}{x-x_0} = f(c)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0^+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\leftarrow x_0^+} f(c) \text{ ,siendo } c \in [x_0, x] \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Análogamente se probaría que:

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$

Hemos probado que:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$

Es decir, existe:

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Como x_0 es cualquier número, entonces F es derivable y $F' = f$.

[4] dibujito

[5] con dibujito

9.7. Regla de Barrow.

Si f es continua en $[a,b]$ y G una primitiva entonces:

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Demostración:

Si f es continua su función integral $F(x) = \int_a^x f$ también es una de sus primitivas y por consiguiente $F - G = K(\text{cte})$.

$$F(a) = \int_a^a f = G(a) + K, \quad \text{como} \int_a^a f = 0, \quad \text{entonces} \quad K = -G(a)$$

como

$$F(b) = \int_a^b f = g(b) + K = G(b) - G(a)$$

9.8. Áreas limitadas por curvas.

Definición: El área comprendida[6] entre la gráfica de una función continua $f \geq 0$ el eje OX y las ordenadas en los puntos extremos del intervalo $[a,b]$ se define como $A = \int_a^b f$.

Ejemplos:

- Hallar el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \sin x$, el eje OX, y las ordenadas en los puntos $[0, 2\pi]$[7].

$$A = 2\int_0^\pi \sin x = [-\cos x]_0^{2\pi} = 2(1-(-1)) = 4$$

- Hallar el área del círculo de radio r, y probar que es πr^2.

  Área de circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2 \to y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

$$A = 2\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = 2r^2\frac{1}{2}\left[\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]_{-r}^r =$$
$$= r^2\left[\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right] = \pi r^2$$

Ejercicios:

- Hallar el área encerrada por $f(x) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
- Hallar el área comprendida entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y la parábola $y = x^2$.
- Hallar el área comprendida entre $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = x^2$.
- Hallar el área comprendida entre $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{2x}$.
- Hallar el área comprendida entre la parábola $y^2 = 2x + 1$ y la recta $x - y - 1 = 0$.
- Hallar el área de la figura $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

[6] dibujito

[7] otro puto dibujo

- Hallar el área limitada por las curvas: $y^2 + 8x = 16$; $y^2 - 24x = 48$.
- Hallar el área limitada por las curvas: $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 - 2y^2 = \dfrac{a^2}{4}$.
- Hallar el área limitada por las curvas: $y^2 = x(x-1)^2$ y abcisas.
- Hallar el área limitada por las curvas: $(y-x)^2 = x^5$; $x = 4$.

9.9. Volúmenes de revolución.

Se[8] define el volumen de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX el área limitada por la gráfica de la función continua $f > 0$ el eje OX y las coordenadas de los extremos del intervalo $[a, b]$ como:

$$V = \pi \int_a^b f^2$$

$$SI(\pi f^2, p) = \pi m_0(x_1 - x_0) + \pi m_1^2(x_2 - x_1) + \ldots + \pi m_{n-1}^2(x_n - x_{n-1})$$

Ejercicios:

- Hallar el volumen del cilíndro de radio r y altura h.
- Hallar el volumen del cono que pasa por $(0, 0)$ de altura h y radio r.
- Hallar el volumen de la esfera de radio r.
- Hallar el volumen del toro de centro $(0, h)$ y radio r, engendrado al girar alrededor del eje OX.
- Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución en el eje de abcisas del trapecio que se hallar situado encima del eje OX y que viene limitado por la linea: $(x-4)y^2 = x(x-3)$

[8] dibujo

Lección 10

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

10.1. Primeras Definiciones.

Llamaremos **ecuación diferencial ordinaria** a una ecuación $\Phi(x, y, y^{'}, y^{''}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ donde aparecen, una variable independiente x, una función $y = f(x)$ que depende de x y derivadas sucesivas de y.

Ej$_1$: $x + y^{'} = 0$

$x + y \cdot y^{''} = 0$

$2xy^{'} - 5y = 7x$

Llamaremos **orden** de una ecuación diferencial al orden de la derivada de mayor oden que en ella aparece.

Una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I se dice que es **solución** de la ecuación $\Phi(x, y, y^{'}, y^{''}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ si para todo x del intervalo se tiene que $\Phi(x, f(x), f(x)^{'}, f(x)^{''}, \ldots, f(x)^{(n)}) = 0$.

10.2. Resolución de Ecuaciones Diferenciales.

Al igual que para el cálculo integral (resolución de una ecuación elemental) no era posible encontrar un único método que permitiera obtener la integral de una función, tampoco existe un único método que permita resolver cualquier ecuación diferencial dada.

En el somero estudio que sobre ecuaciones diferenciales vamos a realizar indicaremos varios tipos de ellas así como sus soluciones; y, dada una ecuación diferencial intentaremos asociarla a alguno de estos tipos para poder encontrar su solución.

10.2.1. Ecuaciones Lineales de Primer Orden.

Son de la forma $a_0(x)y^{'} + a_1(x)y = a_2(x)$, donde a_0, a_1, a_2, son funciones definidas en un intervalo I.

Si suponemos que $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, dividiendo la ecuación por $a_0(x)$ obtenemos la ecuación simplificada:

$$\boxed{y^{'} + p(x)y = q(x)} \quad \text{que vamos a resolver.}$$

Si existiera una función $\mu(x)$ de modo que $\mu(x)(y^{'} + p(x)y) = (\mu(x)y)^{'}$ entonces:

$$\mu y^{'} + \mu p y = \mu^{'} y + \mu y^{'}$$

$$p = \frac{\mu^{'}}{\mu}$$

$$\int p(x)dx = \int \frac{\mu^{'}(x)}{\mu(x)}dx = log(\mu(x)) \Rightarrow \underline{\mu(x) = e^{\int p(x)dx}}$$

Si resolvemos la integral, ciertamente habremos encontrado una función μ de modo que $\mu(y^{'} + py) = (\mu y)^{'}$.

Como por otro lado $(\mu y)^{'} = \mu q$.

$$\mu y = \int \mu q \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{\mu}\int \mu q dx}$$

Ej$_1$: $y^{'} + xy = x$

$$\mu = e^{\int x} = e^{\frac{x^2}{2}} \qquad y = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\int x e^{\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{x^2}{2}}\int d\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{\frac{x^2}{2}} + C\right) = \left(1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

Ejercicio 10.1.- Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$x^3y^{'} + (2 - 3x^2)y = x^3$$

Ejercicio 10.2.- Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y^{'} - 2ycotan(2x) = 1 - 2xcotan(2x) - 2cosec(2x)$
2. $y^{'} + 2yx = 4x$
3. $xy^{'} - y = x^3 + 3x^2 - 2x$

10.2.2. Ecuaciones de Bernuilli

Existen ecuaciones diferenciales que se reducen al tipo anterior de ecuaciones diferenciales mediante un cambio de variable. Entre ellas se encuentran las ecuaciones llamadas de Bernuilli.

Una **ecuación de Bernuilli** es de la forma:

$$\boxed{y^{'} + p(x)y = q(x)y^{\alpha}} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si hacemos un cambio de función poniendo:

$u = y^{1-\alpha}$ entonces

$u^{'} = (1-\alpha)y^{-\alpha}y^{'}$ y sustituyendo el valor de $y^{'}$

$u^{'} = (1-\alpha)y^{-\alpha}(qy^{\alpha} - py) = (1-\alpha)(q - py^{1-\alpha}) = (1-\alpha)(q - pu)$

$$\underline{u^{'} + (1-\alpha)pu = (1-\alpha)q}$$

que es una ecuación lineal.

Una vez obtenida y resuelto el valor de u, el cambio realizado inicialmente $u = y^{1-\alpha}$ nos permite obtener y, con lo cual tendremos resuelta la ecuación inicial.

Ej$_1$: $y^{'} - y = xy^5$ $\qquad u^{'} = -4y^{-5}y^{'} = -4y^{-5}(xy^5 + y) = -4x - 4y^{-4} = -4x - 4u$

$u = y^{-4}$ $\qquad u^{'} + 4u = -4x$

$$\mu(x)u = \int \mu(x)q(x)dx$$

$\mu(x) = e^{\int p(x)} = e^{\int 4} = e^{4x+K} = Ce^{4x}$

$$\mu u = C\int -4xe^{4x}dx = -C\int xd\left(e^{4x}\right) = -C\left(xe^{4x} - \int e^{4x}dx\right) = -C\left(xe^{4x} - \frac{1}{4}e^{4x} + K\right) = -C_1e^{4x}\left(\frac{1}{4} - x\right) + C_2$$

$$u = \frac{1}{Ce^{4x}}C_1e^{4x}\left(\frac{1}{4} - x\right) + C_2 = \frac{1}{4} - x + C_2e^{-4x} = y^{-4}$$

$$y = \left(\frac{1}{4} - x + Ce^{-4x}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

Ej2: $y' + 2xy + xy^4 = 0$

$y' + 2xy = -xy^4$ $\qquad u' = -3y^{-4}y' = 3y^{-4}(xy^4 + 2xy) = 3x + 6xy^{-3} = 3x + 6xu$

$u = y^{-3}$ $\qquad u' - 6xu = 3x$

$\mu = e^{-6\int x} = e^{-6\frac{x^2}{2}+K} = Ce^{-3x^2}$

$\mu u = C\int 3xe^{-3x^2}dx = \dfrac{-C}{2}\int d\left(e^{-3x^2}\right) = \dfrac{-C_1}{2}e^{-3x^2} + C_2$

$u = \dfrac{e^{3x^2}}{C}\left(-\dfrac{C}{2}e^{-3x^2} + C_2\right) = \left(-\dfrac{1}{2} + C_2e^{3x^2}\right) = y^{-3}$

$y = \left(-\dfrac{1}{2} + C_2e^{3x^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$

Ejercicio 10.3.- Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y' + y = 2 + 2x$
2. $xy' - 2y = (x-2)e^x$
3. $y' - y = xy^2$
4. $y' + y = y^2e^x$
5. $xy' + y = x^3y^6$

10.2.3. Ecuaciones en variables separadas

$$y' = f(x)\cdot g(y) \qquad\qquad \frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Si $G(y)$ es una primitiva de $\dfrac{1}{g(y)}$ y si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces la ecuación

$$G(y) - F(x) + K = 0$$

define implícitamente a una función y como función de x, que es solución de nuestra ecuación diferencial.

$\dfrac{d}{dy}(G(y) - F(x) + K) = 0$

$\dfrac{d}{dy}G(y)\cdot\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{d}{dx}(F(x)) + 0 = 0$

$\dfrac{1}{g(y)}y' - f(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = f(x)\cdot g(y)$

Ej1: $y' = x^3y^2$ $\qquad \displaystyle\int\frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y} + C_1$

$\dfrac{y'}{y^2} = x^3$ $\qquad \displaystyle\int x^3dx = \frac{1}{4}x^4 + C_2$

$-\dfrac{1}{y} + C_1 = \dfrac{1}{4}x^4 + C_2$

$\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{4}x^4 + C = 0$ $\qquad y = \dfrac{1}{\frac{1}{4}x^4 + C}$

Ej2:$4ydx + xdy = 0$ $\qquad \displaystyle\int\frac{1}{y} = logy$

$4y + 4xy' = 0$ $\qquad \displaystyle\int -\frac{4}{x} = -4logx$

$4y = -xy'$ $\qquad logy + 4logx = K$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{4}{x} \qquad\qquad logy \cdot x^4 = C$$
$$x^4 y = C$$

Ejercicio 10.4.- Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $(1+2y) + (4-x^2)y' = 0$
2. $y^2 - x^2y' = 0$
3. $(1+y) - (1+x)y' = 0$
4. $-xy + (1+x^2)y' = 0$

10.2.4. Ecuaciones Homogéneas

Estas ecuaciones se resuelven transformándolas en una ecuación en variables separadas, después de un pequeño cambio de función.

Una función $f(x,y)$ que depende de las dos variables x, y se dice que es **homogénea de grado** α si se cumple que: $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$

Ej$_1$: $f(x,y) = x^2 + y^2$ es homogénea de grado 2 porque
$f(tx,ty) = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2 f(x,y)$

Ej$_2$: $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y} \qquad f(tx,ty) = \dfrac{tx+ty}{tx-ty} = \dfrac{x+y}{x-y} = f(x,y)$

Una ecuación diferencial se dice que es **homogénea** si es de la forma:

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

siendo f, g funciones homogéneas del mismo grado.

Para resolver este tipo de ecuaciones hacemos el cambio de variable $u = \frac{y}{x}$, de donde $y = ux$, que derivando queda $y' = u'x + u$ y sustituyendo queda:

$u'x + u = \dfrac{f(x,ux)}{g(x,ux)} = \dfrac{x^\alpha f(1,u)}{x^\alpha g(1,u)} = \dfrac{f(1,u)}{g(1,u)}$ que es una ecuación diferencial en variables separadas.

Por lo tanto:

$u' = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{f}{g} - u\right)$ donde f y g dependen únicamente de la u.

Ej$_3$: $x^3 + y^3 - 3xy^2y' = 0 \qquad y = ux$

$$y' = \frac{x^3+y^3}{3xy^2} \qquad u = \frac{y}{x} \qquad y' = u'x + u = \frac{x^3+y^3}{3xy^2} = \frac{x^3+u^3x^3}{3xu^2x^2} = \frac{x^3(1+u^3)}{x^3 3u^2}$$

$$u'x = \frac{1+u^3}{3u^2} - u = \frac{1-2u^3}{3u^2}$$

$$u' = \frac{1}{x}\left(\frac{1-2u^3}{3u^2}\right) \qquad \left(\frac{3u^2}{1-2u^3}\right)u' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{3u^2}{1-2u^3}du = -\frac{1}{2}log(1-2u^3) + C_1 \qquad -\frac{1}{2}log(1-2u^3) + C_1 - logx + C_2 = 0$$

$$\int \frac{1}{x}dx = logx + C_2 \qquad log(\sqrt{1-2u^3}) + logx + C = 0$$

$$log(x\sqrt{1-2u^3}) + C = 0$$
$$x\sqrt{1-2u^3} + C = 0$$

$x\sqrt{1-2\frac{y^3}{x^3}}=C \qquad \sqrt{\frac{x^3-2y^3}{x}}=C$

Ej$_4$: $8y+10x+(5y+7x)y^{'}=0$

$y^{'}=\frac{-8y-10x}{5y+7x} \qquad u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux\Rightarrow y^{'}=u^{'}x+u$

$u^{'}x+u=\frac{-8y-10x}{5y+7x}=\frac{-8ux-10x}{5ux+7x}=\frac{-8u-10}{5u+7} \qquad u^{'}x=\frac{-8u-10}{5u+7}-u=\frac{-5u^2-15u-10}{5u+7}$

$u^{'}=\frac{1}{x}\left(\frac{-5u^2-15u-10}{5u+7}\right) \qquad -\frac{5u+7}{5u^2+15u+10}u^{'}=\frac{1}{x}$

$-\int\frac{5u+7}{5u^2+15u+10}du=-\frac{1}{2}\int\frac{10u+14+1-1}{5u^2+15u+10}=-\frac{1}{2}\int\frac{10u+15}{5u^2+15u+10}-\frac{1}{2}\int\frac{-1}{5u^2+15u+10}=$
$-\frac{1}{2}log(5u^2+15u+10)+\frac{1}{2}\int\frac{du}{5u^2+15u+10}$

Ejercicio 10.5.- Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y^{'}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$
2. $xy^{'}+3-2x=0$
3. $x^3y^{'}=y(y^2+x^2)$
4. $\frac{xy^{'}-y}{x}=tan\frac{y}{x}$

10.2.5. Ecuaciones Cuasihomogéneas

Existen otras ecuaciones directamente relacionadas con las homogéneas, parecidas a ellas. Son del tipo:

i) $y^{'}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ donde $a_1b_2-a_2b_1=0$, es decir, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.
Se resuelven haciendo el cambio $a_1x+b_1y=u$.

Ej$_1$: $y^{'}=\frac{x-y+3}{2x-2y+5} \qquad x-y=u$

$y=x-u\Rightarrow y^{'}=1-u^{'}$

$1-u^{'}=\frac{x-y+3}{2x-2y+5}=\frac{u+3}{2u+5} \qquad u^{'}=1-\frac{u+3}{2u+5}=\frac{u+2}{2u+5}$

$\frac{2u+5}{u+2}u^{'}=1 \qquad \int\frac{2u+5}{u+2}=\int\left(2+\frac{1}{u+2}\right)du=2u+log(u+2)+C_1$

$\int dx=x+C_2$

$2u+log(u+2)+C_1-x-C_2=0$
$2x-2y+log(x-y+2)-x=C$
$x-2y+log(x-y+2)=C$

ii) $y^{'}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ donde $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, es decir, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$.
Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{array}\right\}$ cuyas soluciones son $\begin{array}{l}x=x_0\\y=y_0\end{array}$

Llamando $\begin{array}{l}x=x_0-\bar{x}\\y=y_0-\bar{y}\end{array}$ y sustituyendo, tenemos que:

$a_1x+b_1y+c_1=a_1(x_0-\bar{x})+b_1(y_0-\bar{y})+C_1=(a_1x_0+b_1y_0+c_1)-(a_1\bar{x}+b_1\bar{y})$

$$(a_1x + b_1y + c_1) = -(a_1\bar{x} + b_1\bar{y})$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = a_2(x_0 - \bar{x}) + b_2(y_0 - \bar{y}) + C_2 = (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) - (a_2\bar{x} + b_2\bar{y})$$
$$(a_2x + b_2y + c_2) = -(a_2\bar{x} + b_2\bar{y})$$
$$-(\bar{y})^{'} = f\left(\frac{a_1(x_0 - \bar{x}) + b_1(y_0 - \bar{y}) + C_1}{a_2(x_0 - \bar{x}) + b_2(y_0 - \bar{y}) + C_2}\right) = f\left(\frac{-(a_1\bar{x} + b_1\bar{y})}{-(a_2\bar{x} + b_2\bar{y})}\right)$$
$$\bar{y}^{'} = -f\left(\frac{a_1\bar{x} + b_1\bar{y}}{a_2\bar{x} + b_2\bar{y}}\right)$$

Ejercicio 10.6.- Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $(2x + 3y - 5) + (x - y + 2)y^{'} = 0$
2. $y^{'} = \left(\dfrac{2x - y + 1}{4x - 2y + 3}\right)^2$

10.2.6. Ecuaciones Diferenciales Exactas

Una ecuación diferencial $P(x, y) + Q(x, y)y^{'} = 0$ se dice que es **exacta** si existe una función $F = F(x, y)$ de modo que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

Un ejemplo simple de ecuación diferencial exacta es:

$x + 2yy^{'} = 0$

$F = \dfrac{x^2}{2} + y^2 \qquad \dfrac{\partial F}{\partial x} = x = P \qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y = Q$

Si para alguna constante C la ecuación $F(x, y) = C$ define en un intervalo a y como función de x, entonces, queriendo calcular la derivada de y obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y^{'} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P(x, y) + Q(x, y)y^{'} = 0$$

Y nos encontramos con que la función y definida implícitamente por la ecuación $F(x, y) = C$ es solución de la ecuación diferencial exacta.

Dicho lo anterior, la pregunta que se plantea es, ¿cómo se sabe si una ecuación diferencial es exacta? ¿Y cómo calcular la función F? En este sentido damos el siguiente teorema:

La ecuación $P(x, y) + Q(x, y)y^{'} = 0$ es diferencial exacta si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Si hemos comprobado que una ecuación diferencial es exacta, la función F podemos calcularla de la forma siguiente:

Puesto que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$ entonces $F = \displaystyle\int P dx = \bar{P} + C(y)$ (cte)

Puesto que $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$ entonces $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\bar{P} + C(y)\right) = Q$

$\dfrac{\partial}{\partial y}(\bar{P}) + C^{'}(y) = Q$

$C^{'}(y) = Q - \dfrac{\partial}{\partial y}(\bar{P}) \qquad C(y) = \displaystyle\int\left(Q - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{P})\right) dy$

En el ejemplo que hemos puesto antes,

$x + 2yy^{'} = 0 \qquad F = \displaystyle\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C(y)$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = C^{'}(y) = 2y = Q \qquad C(y) = \displaystyle\int 2y dy = y^2 + C$

$$F = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + C = 0$$

Ejercicio 10.7.- Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

1. $(x^2 - y) - xy^{'} = 0$
2. $\left(4x^3y^3 + \frac{1}{x}\right) + \left(3x^4y^2 - \frac{1}{y}\right)y^{'} = 0$

10.2.7. Factor Integrante

Dada la ecuación diferencial $P(x,y) + Q(x,y)y^{'} = 0$, es posible que no sea diferencial exacta, pero también es posible que podamos encontrar una función $\mu = \mu(x,y)$ que es no nula en un determinado dominio y que la ecuación $\mu P + \mu Q y^{'} = 0$ es diferencial exacta.

Si integramos esta ecuación y obtenemos una ecuación $F(x,y) = C$, entonces la función y, que define implíctamente esta ecuación, cumple $\mu P + \mu Q y^{'} = 0$, y siendo $\mu \neq 0$, simplificando cumple $P + Qy^{'} = 0$, es decir, la ecuación $F(x,y) = C$ define implícitamente a la solución de la ecuación diferencial $P + Qy^{'} = 0$ como función de x.

A la función μ se le conoce con el nombre de **factor integrante**, y, en modo alguno, es fácil de obtener. Existen, sin embargo, situaciones donde la obtención de μ resulta relativamente sencilla:

a) Cuando $\mu = \mu(x)$ depende únicamente de la variable x.

Como $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$ entonces $P\dfrac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial P}{\partial y} = Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} \Rightarrow \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

$\displaystyle\int \frac{\mu_x}{\mu} = \int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx \Rightarrow log\mu = \int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx$, de donde $\boxed{\mu = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx}}$

El camino recorrido hasta el momento nos lleva a pensar que si $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ depende únicamente de la variable x, entonces la función μ obtenida de la forma $\mu = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx}$, recorriendo hacia atrás el camino, cumple $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$ y consiguientemente que $\mu P + \mu Q y^{'} = 0$ es **diferencial exacta**.

b) Razonando análogamente si $\frac{Q_x - P_y}{P}$ depende únicamente de la variable y, entonces la función $\mu = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P}dy}$, recorriendo el camino inverso, cumple $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$ y por tanto $\mu P + \mu Q y^{'} = 0$ es **diferencial exacta**, siendo μ el **factor integrante**.

Ejercicio 10.8.- Resuelve la siguiente ecuación:

1. $(x^2 + y^2 + x) + xyy^{'} = 0$

Lección 11

Funciones de varias variables. Límites. Continuidad.

11.1. Función real de varias variables.

Definición: Llamaremos función real de n variables a una función:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que asocia a cada elemento de un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ un número real.

Al subconjunto A se le llama dominio de la función.

Suele representarse genéricamente una función real de n variables de la forma:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

aunque $\mathbb{R}^n$ no sea el dominio de esta función. Se utiliza la letra f minúscula para indicar la función pero podría haberse utilizado cualquier otra, usualmente se representan por otras letra $g, h, \ldots$.

Ejemplos:

1.-

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

2.-

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \sqrt{a - x^2 - y^2 - z^2} \end{aligned}$$

Hallar los dominios de las funciones siguientes:

- $f(x, y) = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$.
- $f(x, y) = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}$.
- $f(x, y, z) = \sqrt{a - x^2 - y^2 - z^2}$.
- $f(x, y) = \log(x \cdot y)$.
- $f(x, y) = \sqrt{x \sin y}$.
- $f(x, y) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$.

- $f(x,y) = \log(y^2 - 4x + 8)$.
- $f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

11.1.1. Gráfica.

Definición: Se llama gráfica de la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ al conjunto $G = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)), (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D(f)\}$.

Para el caso de una función de dos variables, si los puntos de la gráfica se llevan al espacio donde están situados los ejes de cooredenadas se obtiene una superficie llamada representación gráfica de la función[1].

La representación gráfica de la función de dos variables no es cosa sencilla. A diferencia de las funciones de una variable para las que se tiene técnicas bastante aceptable para su representación gráfica, no sucede lo mismo para funciones de dos variables.

Una técnica que suele dar resultados aceptables consiste en cortar la superficie por planos paralelos a los planos coordenados XOY, XOZ, YOZ y observar las curvas que se obtienen.

En particular cuando cortamos con planos paralelos al XOY obtenemos unas curvas que proyectadas sobre este plano dan lugar a otras llamadas curvas de nivel.

Ejemplo:

Hallar la representación gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$.

La representación gráfica de esta función está por encima del plano XOY y corta a éste en un único punto $(0,0)$.

Al cortar por planos de la forma $z = K$ obtenemos circunferencias de radio $\sqrt{K}$.

Por otro lado si cortamos por planos YOZ obtenemos parábolas $z = y^2$.

Las curvas de nivel son circunferencias y teniendo en cuenta el corte con el plano YOZ concluimos que la superficie que buscamos es un paraboloide de revolución:[2].

Representar:

- $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $f(x,y) = y^2 - x^2$.

11.1.2. Acotación

Definición: Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que está acotada superiormente (inferiormente) si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) \leq K (\geq K)$ $\forall (\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in D(f)$, al número K se le llama cota superior (inferior).

A la menor de las cotas superiores se le llama supremo y a la mayor de las cotas inferiores ínfimo.

Cuando una función está acotada superior e inferiormente se dice que está acotada.

11.1.3. Extremos

Definición: Un punto $(\bar{x}_0)$ se dice que es un máximo (mínimo) relativo de la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ si existe un entorno $\bigcup(\bar{x}_0)$. A los máximos y mínimos relativos se les llama extremos relativos.

Si $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_0)$ $(f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_0))$ $\forall \bar{x} \in D(f)$ entonces se dice que $f(\bar{x})$ es un máximo (mínimo) absoluto. A los máximos, mínimos absolutos se les llama extremos absolutos.

Si $\forall \bigcup(\bar{x})$, existen $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \bigcup(\bar{x}_0)$ tal que $f(\bar{x}_i) \leq f(\bar{x}_0) \leq f(\bar{x}_2)$ entonces se dice que $\bar{x}_0$ es un punto de silla.

[1] dibujo

[2] Gráfica

11.2. Límite de una función en un punto. Propiedades.

Definición: Diremos que l es el límite de la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto $\bar{x}_0$ y pondremos $\lim_{x\to\bar{x}_0} = l$, si para todo entorno $\bigcup(l)$ existe un entorno $\bigcup(\bar{x}_0)$ tal que si $\bar{x} \in \bigcup(\bar{x}_0) - \{\bar{x}_0\}$ entonces $f(\bar{x}) \in \bigcup(l)$.

Propiedades:

i) Si existe $\lim_{x\to\bar{x}_0} f = l$ es único.

ii) Si $\lim_{x\to\bar{x}_0} f = l$ entonces existe un entorno $\bigcup(\bar{x})_0$ dentro del cual la función f está acotada.

iii) Si $\lim_{x\to\bar{x}_0} f = l \neq 0$ existe un entorno $\bigcup(\bar{x}_0)$ de modo que si $\bar{x} \in \bigcup(\bar{x}_0) - \{\bar{x}_0\}$ es $\text{signo} f(x) = \text{signo}(l)$.

Sus demostraciones son análogas a las de una variable.

11.3. Límite de las operaciones aritméticas

Si $\lim_{x\to\bar{x}_0} f = l_1$ y $\lim_{x\to\bar{x}_0} g = l_2$ entonces:

i) Existe $\lim_{x\to\bar{x}_0}(f \pm g)$ y además $\lim_{x\to\bar{x}_0}(f \pm g) = l_1 \pm l_2$.

ii) Existe $\lim_{x\to\bar{x}_0}(f \cdot g)$ y además $\lim_{x\to\bar{x}_0}(f \cdot g) = l_1 \cdot l_2$.

iii) Si $l_2 \neq 0$ existe $\lim_{x\to\bar{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)$ y además $\lim_{x\to\bar{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{l_1}{l_2}$.

iv) Si $\lim_{x\to\bar{x}_0}(f) = l_1 > 0$ existe $\lim_{x\to\bar{x}_0} f^g$ y además $\lim_{x\to\bar{x}_0} f^g = l_1^{l_2}$.

v) Si $\lim_{x\to\bar{x}_0} f = l_1$ y $\lim_{x\to\bar{x}_0} g = l_2$ entonces existe $\lim_{x\to\bar{x}_0} g \circ f$ y además $\lim_{x\to\bar{x}_0} g \circ f = l_2$[3].

vi) $\lim_{x\to\bar{x}_0} f = l \Leftrightarrow \forall\,(\bar{x}_n) \to \bar{x}_0$ es $\lim_n f(\bar{x}_n) = l$.

Cuando se intenta calcular el límite de una expresión donde aparezcan funciones cuyo límite es conocido y están sometidas a operaciones aritméticas, debemos aplicar los resultados indicados anteriormente, pero sucede a veces, que se obtienen resultados que nada dicen acerca del límite de la expresión. Estos resultados son conocidos con el nombre de indeterminaciones.

Son indeterminaciones:

$$(+\infty) - (+\infty);\ 0 \cdot (\pm\infty);\ \frac{0}{0};\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty};\ (+\infty)^0;\ 1^{\pm\infty}$$

Para resolver estas indeterminaciones transformamos esta expresión para obtener otra que difiera de la primera en lo más un número finito de puntos y cuyo límite puede obtenerse. Puesto que el límite de ambas expresiones coinciden, el problema está resuelto.

Ejercicios:

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

[3] dibujo

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+1}{x^2+y^2+1}$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

11.4. Continuidad.

Definición: Se dice que $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto $\bar{x}$, si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i) Existe $f(\bar{x}_0)$.

ii) Existe $\lim_{x\to\bar{x}_0} f$.

iii) $\lim_{x\to\bar{x}_0} f = f(\bar{x}_0)$.

Caso de que alguna de las tres condiciones anteriores no se cumplan se dice que la función es discontinua en el punto.

En el caso particular en el que existe $\lim_{x\to\bar{x}_0} f$ y no exista $f(\bar{x}_0)$ o bien el límite no coincida con el valor de $f(\bar{x}_0)$ la discontinuidad se llama evitable.

Una función es continua en un conjunto si es continua en cada punto de dicho conjunto.

11.5. Continuidad de las operaciones aritméticas.

Si $f,g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas en un punto $\bar{x}_0$ entonces:

i) $f\pm g$ es continua en $\bar{x}_0$.

ii) $f\cdot g$ es continua en $\bar{x}_0$.

iii) $\dfrac{f}{g}$ es continua en $\bar{x}_0$ si $g(\bar{x}_0)\neq 0$.

iv) f^g es continua en $\bar{x}_0$ si $g(\bar{x}_0) > 0$.

v) Continuidad de la composición:[4]

Si f es continua en $\bar{x}_0$ y g lo es en $f(\bar{x}_0)$ entonces $g \circ f$ es continua en $\bar{x}_0$.

11.6. Teorema de Weierstrass.

Si f es continua en un conjunto compacto entonces alcanza en él sus valores extremos.
Ejercicios:

- Determinar el conjunto más grande dentro del cual la función $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2-1}$ es continua.
- Idem para $f(x,y) = \log(1x + 3y)$.
- Idem para $f(x,y,z) = x + y\sqrt{x+z}$.
- Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x,y) \begin{cases} \dfrac{2x^2-y^2}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Hallar la constante K para que la función:

$$f(x,y) \begin{cases} \dfrac{3x^3-3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ K & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Sea $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{\tan x - \tan y}$ en el cuadrado donde $\left[0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}\right]$ y donde y se mueve $\left[0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{4}\right]$, excepto en la recta $x = y$. ¿Es posible definir f en la recta $x = y$ de modo que sea continua en el cuadrado?.

[4] gráfico

Lección 12

Diferencial de una Función Real de Varias Variables.

En lo que sigue nos moveremos en el contexto de **espacios afines** que son de la forma $(\mathbb{R}^n, V, +)$, donde V es el espacio vectorial de los espacios libres que se siguen de $\mathbb{R}^n$ y la operación $+$ está definida de la forma:

Si $P \in \mathbb{R}^n$, $[\vec{u}] \in V$, entonces $P + [\vec{u}] = Q \in \mathbb{R}^n$, siendo Q el extremo del vector contenido en el vector libre $[\vec{u}]$ con origen en P.

12.1. Derivada Direccional.

El concepto que se tiene de derivada de una función real de variable real en un punto no puede exportarse al caso de funciones reales de varias variables. Sin embargo, podemos considerar situaciones donde valga la definición que se hace de derivada para funciones reales de variable real.

Consideremos por ejemplo una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y (x_0, y_0) un punto de su dominio. Consideremos también el vector unitario $\vec{v}$ (**dirección**) y la recta que pasa por (x_0, y_0) y tiene como dirección $\vec{v}$.

Un plano que pasa por dicha recta y es perpendicular al plano $z = 0$ corta a la superficie, representación gráfica de f, en una curva; y el cociente $\dfrac{f\left((x_0, y_0) + t\vec{v}\right) - f(x_0, y_0)}{t}$ es similar al cociente $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ que se utilizaba para definir la derivada de una función real de variable real.

En este sentido, si existe $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f\left((x_0, y_0) + t\vec{v}\right) - f(x_0, y_0)}{t}$ y es un número real, se dice que existe la **derivada direccional** de la función f en el punto (x_0, y_0), según la dirección $\vec{v}$. Esta derivada direccional se suele representar por $f_{\vec{v}}(x_0, y_0)$.

Al igual que para las funciones reales con una variable, geométricamente, la derivada direccional nos mide la inclinación de la recta tangente a la curva intersección de la superficie, representación gráfica de f, con el plano perpendicular al $z = 0$, que pasa por la recta.

Como veremos en algunos ejemplos la derivada direccional depende del punto y de la dirección elegida.

Ejercicio 12.1.- Hallar la derivada direccional de la función $f(x, y) = xy$ en el punto $P(1, 3)$ según la dirección $\vec{v}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Ejercicio 12.2.- Calcular las derivadas direccionales de la función $f(x, y) = 2x^2 + y$ en el origen.

12.1.1. Derivadas Parciales

A las derivadas direccionales según los vectores de la base se les llama **derivadas parciales**. Además de indicarlas de la forma $f_{e_i}(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ también se suelen indicar por $f_{x_i}(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ y por $\dfrac{\partial f(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)}{\partial x_i}$.

Las derivadas parciales que hemos indicado corresponden a la derivada direccional según el i-ésimo vector de la base que también se le llama la derivada parcial respecto de la i-ésima variable.

En el caso particular de dos variables tenemos las derivadas parciales

$$f_{e_1}(x_0, y_0), \qquad f_x(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \qquad \text{o bien}$$

$$f_{e_2}(x_0, y_0), \qquad f_y(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Ejercicio 12.3.- Hallar las derivadas direccionales de la función $f(x, y) = x - 1 + y^2$ en el punto $(0, 0)$.

Ejercicio 12.4.- Probar que la función $f(x, y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$ posee derivadas parciales en el punto $(0, 0)$, pero no existe derivada direccional en cualquier dirección distinta de los vectores de la base.

Ej$_1$: Probar que la función $f(x, y) \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & si(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si(x, y) = (0, 0) \end{cases}$ admite cualquier derivada direccional en el punto $(0, 0)$.

$\vec{v}(cos\alpha, sen\alpha)$

$$f_{\vec{v}}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((0, 0) + t(cos\alpha, sen\alpha)\right) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tcos\alpha, tsen\alpha)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{tcos\alpha \cdot t^2 sen^2\alpha)}{t^2 cos^2\alpha + t^4 sen^4\alpha} \cdot$$

$$\frac{1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{tcos\alpha \cdot sen^2\alpha)}{cos^2\alpha + t^2 sen^4\alpha} \cdot \frac{1}{t} = \frac{cos\alpha \cdot sen^2\alpha)}{cos^2\alpha} = \frac{sen^2\alpha)}{cos\alpha}$$

Luego en cualquier dirección distinta de $(0, 1)$ y $(0, -1)$ (para las cuales el coseno se anula) existe la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f_{(0,1)}(0, 0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(0, t)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\frac{0t^2}{0+t^4}}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{0}{t^3} = 0 \\ f_{(0,-1)}(0, 0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(0, -t)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{0}{t^3} = 0 \end{array}\right\}$$

Luego existe cualquier derivada direccional en el punto $(0, 0)$.

Obsérvese que si una función de una variable era derivable en un punto, entonces, su continuidad en ese punto estaba asegurada. El ejemplo anterior permite afirmar que no sucede lo mismo para el caso de varias variables, y así el ejemplo muestra que la existencia de derivada en cualquier dirección no asegura la existencia de la continuidad en ese punto.

12.2. Diferencial de una Función en un Punto. Propiedades.

Se dice que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **diferenciable** en el punto $\bar{x}_0$ si existe una **aplicación lineal** $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de modo que:

$$\lim_{h \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x}_0 + h) - f(\bar{x}_0) - L(h)}{|h|} = 0$$

12.2.1. Propiedades

i) Si f es diferenciable en $\bar{x}_0$ entonces $f(\bar{x}_0+h)=f(\bar{x}_0)+L(h)+\alpha(\bar{x}_0,h)\cdot|h|$.

Si f es diferenciable en $\bar{x}_0$ entonces existe una aplicación lineal $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, tal que: $\lim_{h\to\bar{0}}\dfrac{f(\bar{x}_0+h)-f(\bar{x}_0)-L(h)}{|h|}=0$, es decir, $\dfrac{f(\bar{x}_0+h)-f(\bar{x}_0)-L(h)}{|h|}=0$ es un infinitésimo para $h=0$. Si lo llamamos $\alpha(\bar{x}_0,h)$, entonces $\dfrac{f(\bar{x}_0+h)-f(\bar{x}_0)-L(h)}{|h|}=\alpha(\bar{x}_0,h)$, de donde $f(\bar{x}_0+h)=f(\bar{x}_0)+L(h)+\alpha(\bar{x}_0,h)\cdot|h|$.

ii) Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es diferenciable en $\bar{x}_0$, existe una única aplicación lineal $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ que cumple la definición.

Supongamos que existen dos: L_1, L_2. Entonces por la propiedad i):

$$\begin{array}{rcl} f(\bar{x}_0+h) &=& f(\bar{x}_0)+L_1(h)+\alpha_1(\bar{x}_0,h)\cdot|h| \\ f(\bar{x}_0+h) &=& f(\bar{x}_0)+L_2(h)+\alpha_2(\bar{x}_0,h)\cdot|h| \\ \hline 0 &=& 0+L_1(h)-L_2(h)+(\alpha_1(\bar{x}_0,h)-\alpha_2(\bar{x}_0,h))\,|h| \end{array}$$

$L_2(h)-L_1(h)=(\alpha_1-\alpha_2)|h|$

$(L_2-L_1)(h)=(\alpha_1-\alpha_2)|h|$

$(L_2-L_1)(\dfrac{h}{|h|})=\alpha_1-\alpha_2$

$(L_2-L_1)(v)=\alpha_1(\bar{x}_0,h)-\alpha_2(\bar{x}_0,h)$

$\lim_{t\to\bar{0}}(L_2-L_1)(v)=\lim\alpha_1(\bar{x}_0,h)-\alpha_2(\bar{x}_0,h)$

$(L_2-L_1)(v)=0$

Si la imagen en cualquier dirección por una aplicación lineal es cero, necesariamente esta aplicación lineal debe ser la aplicación lineal nula, y consiguientemente $L_1=L_2$.

A esta aplicación lineal $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ lo vamos a llamar **diferencial** de la función f en el punto $\bar{x}_0$ y en lo sucesivo la indicaremos por $df(\bar{x}_0)$.

Si $df(\bar{x}_0)$ es una aplicación lineal, entonces, fijadas bases en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$, posee una expresión matricial que viene dada por $Y=AX$, donde la matriz A es una matriz fila $A=[a_1,\ldots,a_n]$ con a_i la imagen del i-ésimo vector de la base por la aplicación lineal $a_i=df(\bar{x}_0)(e_i)$.

iii) Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es diferenciable en $\bar{x}_0$ entonces admite derivada en cualquier dirección en ese punto y además:

$$f_{\vec{v}}(\bar{x}_0)=df(\bar{x}_0)(\vec{v})$$

Consideremos $f_{\vec{v}}(\bar{x}_0)=\lim_{t\to 0}\dfrac{f((\bar{x}_0)+t(\vec{v}))-f(\bar{x}_0)}{t}$, por la propiedad i)

$f_{\vec{v}}(\bar{x}_0)=\lim_{t\to 0}\dfrac{f(\bar{x}_0)+df(\bar{x}_0)(t\vec{v})+\alpha(\bar{x}_0,t\vec{v})\cdot|t\vec{v}|-f(\bar{x}_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(df(\bar{x}_0)(\vec{v})+\alpha(\bar{x}_0,t\vec{v})\dfrac{|t|}{t}\right)=$ $df(\bar{x}_0)(\vec{v})+0=df(\bar{x}_0)(\vec{v})$

Teniendo en cuenta esta propiedad se tiene que:

$f_{x_i}(\bar{x}_0)=f_{e_i}(\bar{x}_0)=df(\bar{x}_0)(e_i)=a_i$

donde a_i es el elemento i-ésimo de la matriz A asociada a la aplicación lineal $df(\bar{x}_0)$.

La matriz A asociada a la aplicación lineal $df(\bar{x}_0)$ es entonces una matriz fila (o columna) cuyos elementos son las derivadas parciales $A=[f_{x_1}(\bar{x}_0),f_{x_2}(\bar{x}_0),\ldots,f_{x_n}(\bar{x}_0)]$.

Si tenemos en cuenta que $\overrightarrow{\nabla f}\,(\bar{x}_0)$ (vector gradiente) es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de la función f en el punto $\bar{x}_0$, entonces el producto escalar de $\overrightarrow{\nabla f}\,(\bar{x}_0)$ por un vector coincide con la imagen de ese vector por $df(\bar{x}_0)$.

$$\overrightarrow{\nabla f}\,(\bar{x}_0)\cdot\vec{v}=df(\bar{x}_0)$$

iv) Si f es diferenciable en $\bar{x}_0$, es **continua** en ese punto.

Si f es diferenciable, entonces:

i) Existe $f(\bar{x}_0)$

ii) ¿$\exists \lim\limits_{x\to\bar{x}_0} f(x)$?

$\lim\limits_{x\to\bar{x}_0} f(x) = \lim\limits_{h\to\bar{0}} f(\bar{x}_0+h) = \lim\limits_{h\to\bar{0}} (f(\bar{x}_0) + df(\bar{x}_0)(h) + \alpha_1(\bar{x}_0,h)\cdot|h|) = f(\bar{x}_0)$

12.3. Derivada Parcial

Recordemos que la derivada parcial de una función f en un punto $(\bar{x}_0)$ respecto de la i-ésima variable coincide con la derivada direccional de esta función en el punto $(\bar{x}_0)$ y según la dirección del i-ésimo vector de la base.

$$f_{x_i}(\bar{x}_0) = f_{e_i}(\bar{x}_0)$$

Como $f_{e_i}(\bar{x}_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\bar{x}_0+te_i) - f(\bar{x}_0)}{t} =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) + t(0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots,0)) - f(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_i^\circ + t, x_{i+1}^\circ, \ldots, x_n^\circ) - f(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)}{t}$$

Obtener la derivada parcial en un punto es obtener la derivada de la función en ese punto suponiendo que esta derivada es la de una función cuya única variable es la i-ésima y el resto permanece constante.

Si existe para la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la derivada parcial respecto de la variable x_i en cualquier punto de su dominio, entonces, podemos definir una función que llamaremos función derivada parcial de f respecto de la variable x_i en cualquier punto del dominio de f, asociando a cada punto de este dominio la derivada parcial de f, respecto de la variable x_i en ese punto. Esta función la representaremos en lo sucesivo por f_{x_i}, f_i, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

$$\begin{aligned} f_{x_i} &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \bar{x} &\rightsquigarrow f_{x_i}(\bar{x}) \end{aligned}$$

Si, como dijimos, para obtener f_{x_i} en un punto concreto $\bar{x}_0$, se obtenía la derivada de la función f en el punto $\bar{x}_0$ respecto de la variable x_i y suponiendo que el resto de variables son constantes, entonces para obtener la función f_{x_i} derivaremos f con respecto a la variable x_i, siguiendo las técnicas ya conocidas de la derivación de funciones de una variable, y suponiendo que el resto de variables son constantes.

Ej$_1$: Si $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ entonces:

$f_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad$ $f_y = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Ejercicio 12.5.- Probar que la función $z = 1 + x sen\frac{y}{x}$ satisface la ecuación $xz_x + yz_y = z - 1$.

Ejercicio 12.6.- Para la función $z = \frac{1}{xy}$ probar que se cumple $xz_x + yz_y + 3\sqrt[3]{z_x z_y} = z$.

Puesto que la función derivada parcial de f respecto de la variable x_i, es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, cabe pensar en su función derivada parcial respecto de la variable x_j, $(f_{x_i})_{x_j}$. Caso de que exista, a esta función se le llama función derivada parcial segunda de la función f respecto de las variables x_i, x_j. Se suele representar por $f_{x_i x_j}$, f_{ij}, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

$$f_{x_i x_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

De nuevo podemos pensar en la función derivada parcial respecto de la variable x_k de la función $f_{x_i x_j}$, y caso de que exista, obtendríamos la función derivada parcial tercera de f respecto de las variables x_i, x_j, x_k.

Si continuamos sucesivamente las definiciones, llegaremos a obtener la derivada parcial n-ésima de la función f, respecto de las variables x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_n} a partir de la derivada parcial de orden $n-1$ de la función f. Esta derivada parcial n-ésima se suele representar por $f_{x_{i_1}}$, $f_{x_{i_2}}, \ldots, f_{x_{i_n}}$, o bien por $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\partial x_{i_{n-1}}\ldots\partial x_{i_1}}$

En las derivadas parciales de orden superior cabe la posibilidad de considerar, por un lado, la derivada parcial de f respecto de unas variables en un cierto orden, y, por otro lado, la derivada parcial de mismo grado, respecto de las mismas variables, pero en otro orden. Por ejemplo cabe considerar f_{xy}, f_{yx}.

La pregunta inmediate es si ambas derivadas parciales son iguales. En este sentido vamos a dar una definición y un teorema que nos asegurará la igualdad en ciertas condiciones.

Una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que es de clase $C^{(K}$ si existen todas las derivadas parciales hasta las de orden k y son continuas.

Teorema (Schwarz) Si la función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase $C^{(1}$, y en el punto $\bar{x}_0$ existen f_{ij}, f_{ji} y son continuas, entonces $f_{ij}(\bar{x}_0) = f_{ji}(\bar{x}_0)$.

Ejercicio 12.7.- Probar que las siguientes funciones cumplen la ecuación $z_{xx} + z_{yy} = 0$.

1. $z = e^x seny$
2. $z = e^x cosy$
3. $z = \sqrt{x + \sqrt{x^2+y^2}}$
4. $z = arctan\frac{y}{x}$

Ejercicio 12.8.- Calcular simplificando el valor de $\frac{x}{y}f_{xx} - 2f_{xy} - 3\frac{y}{x}f_{yy}$, siendo $f(x,y) = (x^3y)^{\frac{1}{5}}$.

Ej2: Estudiar si la función $f(x,y)\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$ es diferenciable en $(0,0)$.

1) Continuidad

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3(cos^3\alpha + sen^3\alpha)}{\rho^2(cos^2\alpha+sen^2\alpha)} = \lim_{\rho\to 0}\rho(cos^3\alpha+sen^3\alpha)$$

$-2\rho \leq \rho(cos^3\alpha + sen^3\alpha) \leq 2\rho$ Luego es continua en $(0,0)$.

2) Derivadas Parciales

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1 = a_1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1 = a_2$$

3) Diferencial

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h) - f(0,0) - L(h)}{|h|} = 0$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2) - L(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2) - [h_1,h_2]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2\end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2) - [h_1,h_2]\begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - (h_1+h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{-h_1^2h_2 - h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} -\frac{h_1^2h_2 + h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} -\frac{h_1^2 h_2 + h_1 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} -\frac{h_1^2 m h_1 + h_1 m^2 h_1^2}{(h_1^2+m^2h_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} -\frac{h_1^3(m+m^2)}{h_1^3(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$h_2 = mh_1$

Como depende de m, no existe el límite, y por tanto, no existe la diferencial en $(0,0)$.

Ejercicio 12.9.- ¿Es diferenciable la función $f(x,y)\begin{cases} (x^2+y^2)sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en el punto $(0,0)$.

Ejercicio 12.10.- ¿Son diferenciables las siguientes funciones en el punto $(0,0)$?

1. $f(x,y)\begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. $f(x,y)\begin{cases} \frac{x^2cos(x-y)}{x^2+y^2} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$

12.4. Plano Tangente

Consideremos una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que es diferenciable en el punto (x_0, y_0).

Consideremos igualmente la función $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $z = f(x_0, y_0)+f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

La gráfica de ambas funciones pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ya que $z(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$. Además la gráfica de la función z es un plano.

Por otro lado

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-z}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} =$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-(f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} =$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-[(x-x_0),(y-y_0)]\begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0)(x-x_0) \\ f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{bmatrix}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

Por consiguiente $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - z) = 0$ y además la función z, en las cercanías de (x_0, y_0) se parece a la función f más que $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ se parece a cero.

Si consideramos una función de la forma $\bar{z} = f(x_0, y_0) + a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0)$ con $a_1 \neq f_x(x_0, y_0)$ y $a_2 \neq f_y(x_0, y_0)$, entonces $\lim \frac{f(x,y)-\bar{z}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$, si en las cercanías de (x_0, y_0), $\bar{z}$ se parece a $f(x, y)$, a lo más, como $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ se parece a cero.

Evidentemente, de todas las funciones similares a $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ es ésta la que más se parece a $f(x, y)$ en las cercanías de (x_0, y_0). A esta función se le llama **plano tangente** a la gráfica de la función f en el punto (x_0, y_0).

Ejercicio 12.11.- Hallar la ecuación del plano tangente a las superficies.

1. $z = x^2 + 2y^2$ en $(1, 1, 3)$.

2. $z = senxcosy$ en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

3. $z = e^{xcosy}$ en $(1, 0, e)$

Ejercicio 12.12.- Hallar, sin usar la calculadora, el valor de:

1. $(1,04)^{2,02}$.
2. $log\left(\sqrt[3]{1,03} - \sqrt[4]{0,98} + 1\right)$

Lección 13

Fórmula de Taylor. Aplicaciones.

13.1. Teorema del valor medio.

Sea $\bar{x}_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ y sea $h \in \mathbb{R}^n$. Consideremos el segmento de extremos $\bar{x}_0,\ \bar{x}_0 + h$ y la función:

$$\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R};\quad \text{Definida por: } \phi(t) = f(\bar{x}_0 + th)$$

Proposición: Si f es diferenciable en el segmento que une $\bar{x}_0,\ \bar{x}_0 + h$ entonces ϕ es diferenciable en $(0,0)$ y además la derivada es:

$$\phi'(t) = df(\bar{x}_0 + th)(h)$$

Demostración:

Sea $t_0 \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}
\phi'(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\phi(t_0 + t) - \phi(t_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\bar{x}_0 + (t_0 + t)h\right) - f(\bar{x}_0 + t_0 h)}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f\left((\bar{x}_0 + t_0 h) + th\right) - f(\bar{x}_0 + t_0 h)}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{df(\bar{x}_0 + t_0 h)(th) + \alpha(\bar{x}_0 + t_0 h_1 th)|th|)}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0} \left[df(\bar{x}_0 + t_0 h)(h) + \underbrace{\alpha(\bar{x}_0 + t_0 h_1 th)}_{0} \frac{|t|}{t}|h| \right] = \\
&= df(\bar{x}_0 + t_0 h)(h) + 0 = df(\bar{x}_0 + t_0 h)(h)
\end{aligned}$$

Teorema del valor medio: Si f es continua en el segmento de extremos $\bar{x}_0, \bar{x}_0 + h$ y diferenciable en el interior del mismo entonces:

$$f(\bar{x}_0 + h) - f(\bar{x}_0) = df(\bar{x}_0 + th)(h) \text{donde } t \in (0,1)$$

Demostración:

La función $\phi(t) = f(\bar{x}_0 + th)$ es continua en $[0,1]$ por serlo f en el segmento y derivable en $(0,1)$ por ser f diferenciable en el interior del segmento.

Entonces ϕ cumple las condiciones del teorema de los incrementos finitos de Lagrange y por tanto:

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(1-0) \text{ ,con } t \in (0,1)$$
$$f(\bar{x}_0 + h) - f(\bar{x}_0) = df(\bar{x}_0 + th)(h)$$

13.2. Fórmula de Taylor de grado n en el punto $\bar{x}_0$ con resto de Lagrange.

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^{n+1} en un entorno de un punto $\bar{x}_0$, entonces dado un punto $\bar{x}$ de ese entorno, la función ϕ definida como en la pregunta anterior en el intervalo $[0,1]$ y siendo $h = \bar{x} - \bar{x}_0$ .Puede demostrarse que admite derivada hasta orden $n+1$ en el intervalo $[0,1]$ y consiguientemente podemos considerar su fórmula de Taylor de grado n en un punto cualquiera de este intervalo. Pues bien, esta fórmula de Taylor permite demostrar que[1]:

$$\begin{aligned}
f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0 + h) = f(\bar{x}_0) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\bar{x}_0)(x^i - x_0^i) + \\
+ \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i,x_j}(\bar{x}_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \\
+ \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n} f_{x_1 x_j x_k}(\bar{x}_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)(x^k - x_0^k) + \ldots + \\
+ \frac{1}{n!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{n} f_{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n}}(\bar{x}_0)(x^{i_1} - x_0^{i_1})(x^{i_2} - x_0^{i_2})\ldots(x^{i_n} - x_0^{i_n}) + \\
+ \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{n} f_{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n}}(\bar{x}_0 + sh)(x^{i_1} - x_0^{i_1})\ldots(x^{i_{n+1}} - x_0^{i_{n+1}})
\end{aligned}$$

Siendo el resto:

$$\frac{1}{(n+1)!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{n} f_{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n}}(\bar{x}_0 + sh)(x^{i_1} - x_0^{i_1})\ldots(x^{i_{n+1}} - x_0^{i_{n+1}})$$

A esta expresión se le llama fórmula de Taylor de grado n de la función f en el punto $\bar{x}_0$ con resto de Lagrange.

Y en el caso particular en que $\bar{x}_0 = \bar{0}$ la fórmula se llama de McLaurin.

Para el caso de dos variables:

$$\begin{aligned}
f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right) + \\
+ \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) + \\
+ \frac{1}{3!}(f_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + 3f_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)^3 + \\
+ 3f_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f_{yyy}(x_0,y_0)/y-y_0)^3) + \ldots + \\
+ \frac{1}{n!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{n} f_{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n}}(x_0,y_0)(x^{i_1} - x_0^{i_1})\ldots(x^{i_n} - x_0^{i_n}) + \\
+ \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}=1}^{n+1} f_{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{n+1}}}\left((x_0,y_0) + 3(x-x_0,y-y_0)\right)(x^{i_1} - x_0^{i_1})\ldots(x^{i_{n+1}})
\end{aligned}$$

[1]dibujo

McLaurin:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(f_x(0,0)x + f_y(0,0)y\right) + \\
&+ \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(0,0)x^2 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right) + \\
&+ \frac{1}{3!}\left(f_{xxx}(0,0)x^3 + 3f_{xxy}(0,0)x^2y + 3f_{xyy}(0,0)xy^2 + f_{yyy}(0,0)y^3\right) + \ldots + \\
&+ \frac{1}{n!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{n} f_{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n}}(x^{i_1}\ldots x^{i_n}) + \\
&+ \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}=1}^{n+1} (s_x,s_y)(x^{i_1}\ldots x^{i_{n+1}})
\end{aligned}$$

Un operador es una expresión que al actuar sobre una función da lugar a una expresión matemática. Un operador puede ser la expresión:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Y si definimos el operador:

$$\begin{aligned}
\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = &\binom{n}{0}\frac{\partial^n}{\partial x^n} + \\
&+ \binom{n}{1}x^{n-1}y\frac{\partial^n}{\partial y\partial x^{n-1}} + \\
&+ \binom{n}{2}x^{n-1}y^2\frac{\partial^n}{\partial y^2\partial x^{n-1}} + \ldots + \\
&+ \binom{n}{n}y^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}
\end{aligned}$$

Y decimos que al actuar sobre una función f da lugar a:

$$\begin{aligned}
\left(s\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0) = &\binom{n}{0}x^n\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^n} + \\
&+ \binom{n}{1}x^{n-1}y\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial y\partial x^{n-1}} + \\
&+ \binom{n}{2}x^{n-2}y^2\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial y^2\partial x^{n-2}} + \ldots + \\
&+ \binom{n}{n}y^n\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial y^n}
\end{aligned}$$

entonces la fórmula de McLaurin para dos variables que hemos escrito anteriormente se puede escribir de forma abreviada como:

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{i!}\sum_{i=1}^{n}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^1 f(0,0) + \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(s_x,s_y)$$

Calcular la fórmula de McLurin de orden 4:

- $f(x,y) = e^x \cos y$
- $f(x,y) = \log(1-x)\log(1-y)$ en el punto (0,0).
- $f(x,y) = x^y$ en el punto (1,1).

- $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ en el punto (0,0).
- $f(x,y) = x^3y^3 + x^2y - y^2 + 1$ en el punto (1,2).

13.3. Extremos relativos.

Definición: Un punto $\bar{x}_0$ se dice que es un punto crítico de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable $d\,(f(\bar{x}_0)) = \bar{0}$.

Ejemplo:

Hallar los puntos críticos de la función $4(x-y)-(x^2+y^2)$:

$f_x = 0 \longrightarrow 4 - 2x = 0 \longrightarrow x = 2.$

$f_y = 0 \longrightarrow -4 - 2y = 0 \longrightarrow y = -2.$

Proposición: Si $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un extremo relativo de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable entonces es un punto crítico.

Demostración:[2]

Consideremos la función ya conocida:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow \phi(t) = f(\bar{x}_0 + tv) \end{aligned}$$

Puesto que la función f es diferenciable, la función ϕ sabido es que es derivable, siendo $\phi'(t) = df(\bar{x}_0 + tv)(v)$.

Si la función f tiene un extremo relativo en $\bar{x}_0$ entonces la función ϕ posee un extremo relativo $t = 0$ y por consiguiente $\phi'(0) = 0$.

Como $\phi'(0) = df(\bar{x}_0)(v)$ entonces $df(\bar{x}_0)(v) = 0$ y puesto que v es una dirección cualquiera necesariamente $df(\bar{x}_0) = \bar{0}$.

Queda probado que $\bar{x}_0$ es un punto crítico de f.

13.4. Cálculo de los extremos relativos.

Siguiendo la proposición anterior, para calcular los extremos relativos de una función f calcularemos sus puntos críticos. Ahora bien, no todo punto crítico es extremo realtivo ($(0,0)$ es punto crítico de $f(x,y) = x^3y$ pero no es un extremo relativo), por tanto se hace necesario un criterio que permita distinguir de entre los puntos críticos aquellos que son relativos de los que no los son.

Si $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}$ es un punto crítico, su naturaleza viene dada por la diferencia $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)$ dentro de un entorno $\bigcup(\bar{x}_0)$. Así, cuando $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) \geq 0 (\leq 0)$ para cualquier $\bar{x} \in \bigcup(\bar{x}_0) - \{\bar{x}_0\}$ entonces $\bar{x}_0$ es un mínimo (máximo) relativo. Si por el contrario para cualquier entorno $\bigcup(\bar{x}_0)$ es posible encontrar $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ de modo que $f(\bar{x}_1) < f(\bar{x}) < f(\bar{x}_2)$ entonces $\bar{x}_0$ es un punto de silla.

Para analizar la diferencia $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)$ consideremos la fórmula de Taylor de orden 1, de la función f en el punto $\bar{x}_0$:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_x(\bar{x}_0)(x^i - x_0^i)}_{0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_1,x_j}\left(\bar{x}_0 + s(\bar{x} - \bar{x}_0\right)(x^i - x_0^1)(x^j - x_0^j)$$

Puesto que $\bar{x}_0$ es un punto crítico $f_{x_1}(\bar{x}_0) = 0, \forall\, i = 1, 2, \ldots n$ y podremos poner:

[2] grafico

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_1,x_j}(\bar{x}_0 + s(\bar{x} - \bar{x}_0))(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)$$

De la expresión anterior deducimos que la diferencia $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)$ que buscamos resulta complicada de estudiar puesto que depende de un parámetro $s \in (0,1)$ que es desconocido.

Sin embargo esta situación se salva por el siguiente teorema que a continuación enunciamos:

Teorema: Si la forma cuadrática:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_1,x_j}(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)$$

es definida positiva ($\forall\, x > 0$) [negativa] y $f \in C^{c2}$ en un punto $\bigcup(\bar{x}_0)$ entonces $\bar{x}_0$ es un mínimo [máximo] relativo.

Si por el contrario la forma cuadrática es indefinida entonces $\bar{x}_0$ es un punto de silla.

Recordemos que si A es la matriz simétrica de orden n asociada a una forma cuadrática y d_i son sus menores principales:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$d_1 = |a_1 1|;\ d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \dots;\ d_n = |A|$$

Entonces:

- Si $d_i > 0,\ \forall\, i = 1, 2, \dots, n$ la forma cuadrática es definida positiva.
- Si $(-1)d_i > 0,\ \forall\, i = 1, 2, \dots, n$ la forma cuadrática es definida negativa.
- Si $|A| \neq 0$ y no ocurre alguno de los dos casos anteriores, entonces la forma cuadrática es indefinida.

Para el caso de dos variables la matriz asociada a la forma cuadrática:

$$\sum_{i,j=1}^{2} f_{x_i,x_j}(\bar{x}_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)$$

es de la forma:

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

y por tanto:

- Si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$:

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0 \rightarrow \text{ es definida positiva}$$

- Si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$:

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} < 0 \rightarrow \text{ es definida negativa}$$

- Si:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}}_{\text{Determinante Hessiano}} < 0 \rightarrow \text{ es indefinida}$$

Ejemplo:

$$f(x, y) = 4(x - y) - (x^2 + y^2)$$

$$f_x = 4 - 2x = 0 \rightarrow x = 2$$

$$f_y = -4 - 2y = 0 \rightarrow y = -2$$

$$f_{xx} = -2 < 0; \; f_{xy} = 0; \; f_{yy} = -2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 4 > 0$$

$$f_{xx} = -2 < 0 \leftarrow \text{ es un máximo relativo}$$

Calcular los extremos relativos de::

- $f(x, y) = y^x$.
- $f(x, y) = 2y^2 - x(x - 1)^2$.
- $f(x, y) = x^3 + y^2 + x^2y + 2y + 1$.
- $f(x, y) = \cos(x + y) + \sin(x - y)$.
- $f(x, y) = y\, e^{-x^2}$.
- $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3axy, \; a \neq 0$.
- $f(x, y) = xy + \dfrac{8}{y} + \dfrac{8}{x}$.
- $f(x, y) = (y - x^3)(y - 8x^3)$.